МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РОССИЙСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ МИРЭА

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

1 семестр

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Для студентов очной формы обучения
институтов ИТ и РТС, Физико-технологического института

Под редакцией кандидата физико-математических наук
Н.С. Чекалкина

Москва-2019

УДК
ББК

Печатается по решению редакционно-издательского совета Российского технологического университета (МИРЭА)

Рецензенты:

Бобылева Татьяна Николаевна, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры высшей математики МГСУ

Параскевопуло Ольга Ригасовна, к.ф.-м.н.,-, доцент кафедры высшей математики-2, Физико-технологического института, РТУ МИРЭА

Авторский коллектив: Булах Елена Эрнестовна, Гущина Елена Николаевна, Кузнецова Екатерина Юрьевна, Морозова Татьяна Анатольевна, Малыгина Ольга Анатольевна, Немировская-Дутчак Ольга Эрнестовна, Новикова Александра Ивановна, Таланова Людмила Ивановна.

Алгебра и геометрия,1 семестр – М.: Российский технологический университет (МИРЭА), 2018-

Методическое пособие предназначено для студентов очной формы обучения институтов ИТ, РТС и Физико-технологического института. Пособие включает следующие разделы: алгебра матриц, системы линейных уравнений, аналитическая геометрия. Представленный материал используется при изучении курса алгебры и геометрии (2-ой семестр), курсов математического анализа, дифференциальных уравнений, теории случайных процессов, радиотехники, физики и др. В приложении приводятся примеры решения задач типового расчета. Издается в авторской редакции.

Оглавление

Введение

Данное пособие разработано коллективом преподавателей кафедры высшей математики-2 РТУ (МИРЭА) для студентов очной формы обучения институтов РТС, Информационных технологий и Физико-технологического института. Пособие содержит задачи для подготовки к контрольным работам и экзамену (зачету), список теоретических вопросов для подготовки к сдаче экзамена (зачета), перечень рекомендуемой литературы, типовые варианты контрольных работ по курсу, образец экзаменационного (зачетного) билета, типовой расчет.

Пособие состоит из методических указаний, двух частей и приложения. *Часть 1* – это основные типы задач для подготовки к контрольным работам, экзамену (зачету) и прикладные задачи. Для успешного овладения материалом рекомендуется решить все задачи первой части. *Часть 2* – типовой расчет, каждый студент выполняет свой вариант задачи из второй части. Задания второй части также используются для подготовки к контрольным работам и экзамену (зачету). *В Приложении* разобраны примеры решения задач типового расчета.

В данном пособии представлены, во-первых, традиционные задачи алгебры и геометрии (1-ой семестр). Для этих задач выделены уровни сложности: стандартные задачи и задачи повышенной трудности (для углубленного изучения материала). Во-вторых, введены задачи прикладного характера, возникающие в специальных дисциплинах, например, в электротехнике, теоретической механике, физике. Здесь же есть задачи, встречающиеся в курсе дифференциальных уравнений. Решение подобных задач раскрывает взаимосвязи курса алгебры и геометрии с дифференциальными уравнениями, с электротехникой, физикой, механикой.

На основе материала курса алгебры и геометрии 1-го семестра строится алгебра и геометрия 2-го семестра.

Методические указания

Содержание курса «Алгебра и геометрия» (1-ый семестр) включает следующие разделы: алгебра матриц (действия с матрицами, определитель матрицы и его вычисление, обратная матрица, критерий существования обратной матрицы, вычисление); методы решения систем линейных уравнений (метод Крамера, использование обратной матрицы, метод Гаусса), применение при решении прикладных задач; геометрические векторы (действия с векторами, скалярное, векторное и смешенное произведения векторов, их свойства, использование при решении геометрических задач и других прикладных задач); уравнение прямой и плоскости; взаимное расположение прямых, плоскостей, прямой и плоскости; кривые и поверхности второго порядка.

От студента требуется успешное овладение материалом по указанным темам, т.е. необходимо знать определения понятий, формулировки и доказательства основных теорем курса. Студент также должен продемонстрировать умение решать типовые задачи данного курса.

В течение семестра по курсу алгебры и геометрии проводятся две контрольные работы и выполняется типовой расчет.

Контрольная работа №1 проводится по теме *«Алгебра матриц. Решение систем линейных уравнений»*.

Примерный вариант контрольной работы №1

1. Вычислить определитель матрицы: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 1 & 2 \\ 7 & -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

2. Решить матричное уравнение: $X\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix}$. Сделать проверку.

3. Решить систему уравнений двумя способами: методом Крамера и с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$.

4. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

5. Найти общее решение линейной неоднородной системы уравнений методом Гаусса. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$

Контрольная работа №2 проводится по теме *«Скалярное, векторное и смешанное произведение. Прямая и плоскость»*.

Примерный вариант контрольной работы №2

1. Даны точки *A*(1; 0;-1), *B*(0; 2;-3), *C*(2; 4; -2), *D*(-2; 6; 2). Найти:
   - величину внутреннего угла при вершине *A* в треугольнике *ABC*;
   - длину медианы треугольника *ABC*, проведенной из вершины *C*;
   - площадь треугольника *ABC*;
   - объем тетраэдра *DABC*.
2. Вычислить угол между векторами $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$, если $|\vec{p}| = 1, |\vec{q}| = \sqrt{3}, \angle(\vec{p}, \vec{q}) = \pi / 6$.
3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки *A* (-2; 7; 3) и *B*(1; -2; 8) перпендикулярно плоскости $7x + 3y + 2z - 10 = 0$.
4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *A*(-4; -7; 1) параллельно прямой $\begin{cases} 2x + 3y + z - 6 = 0 \\ 4x - 5y - z + 2 = 0 \end{cases}$.
5. Найти точку, симметричную точке *M* (-3; 1; -9) относительно плоскости $4x - 3y - z - 7 = 0$.

Замечание: по усмотрению преподавателя количество задач контрольных работ может быть изменено.

Типовой расчет выполняется каждым студентом в отдельной тетради в соответствии с назначенным ему номером варианта. Студент пишет подробное решение каждой задачи, объясняет решения задач преподавателю, отвечает на вопросы. *Наличие выполненного типового расчета является обязательным условием допуска студента на экзамен или зачет.*

По итогам обучения на основе учебного плана проводится экзамен или зачет по данному курсу.

Примерный вариант экзаменационного (или зачетного) билета

1. Решить уравнение $AX = B$, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Сделать проверку.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x - 2y = -3 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ двумя способами: с помощью обратной матрицы и методом Крамера.

3. Найти общее решение системы линейных уравнений, выделить частное решение неоднородной системы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$

4. Найти длину высоты пирамиды $ABCD$, опущенной из вершины D, если даны координаты вершин A(1,2,-1), B(5,5,1), C(3,8,-3), D(6,8,1).

5. Даны вершины треугольника ABC: A(1,2,-1), B(5,5,1), C(3,8,-3). Составить каноническое и параметрическое уравнение медианы AD.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M(2,-1,-3) перпендикулярно прямой $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z+3}{5}$.

7. Определение гиперболы. Составить уравнение гиперболы с фокусами в точках F_1(-6,0) и F_2(-6,0) и эксцентриситетом равным $\sqrt{3}$. Сделать чертеж.

8. Теоретический вопрос (из списка теоретических вопросов).

9. Определить тип поверхности второго порядка, заданной уравнением $x^2 + 4y^2 - 9z^2 - 36 = 0$. Привести уравнение поверхности к каноническому виду. Сделать чертеж.

Замечание: по усмотрению преподавателя количество задач билета может быть изменено.

Теоретические вопросы по курсу

1. Сложение матриц, умножение матрицы на число, умножение матриц. Транспонирование матриц. Основные свойства этих операций.

2. Определители 2-го и 3-го порядка. Правило Саррюса. Миноры и алгебраические дополнения. Определение определителей n-го порядка. Основные свойства определителей.

3. Обратная матрица, определение, основные свойства. Критерий существования обратной матрицы. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

4. Решение матричных уравнений и систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

5. Понятие ранга матрицы. Элементарные преобразования матриц. Сохранение ранга матриц при элементарных преобразованиях.

6. Основные понятия теории систем линейных уравнений. Системы однородные и неоднородные, совместные и несовместные, определенные и неопределенные. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

7. Теорема Кронекера-Капелли. Теорема о существовании нетривиального решения однородной системы. Фундаментальная система решений. Общее решение системы линейных уравнений.

8. Сложение векторов и умножение вектора на число. Свойства линейных операций. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам на плоскости и по трем некомпланарным векторам в пространстве. Понятие базиса.

9. Скалярное произведение векторов, свойства, координатное выражение.

10. Векторное произведение векторов. Геометрические и алгебраические свойства векторного произведения, его координатное выражение.

11. Смешанное произведение векторов. Геометрические и алгебраические свойства смешанного произведения, его координатное выражение.

12. Общее уравнение прямой на плоскости. Уравнение прямой с угловым коэффициентом, каноническое и параметрические уравнения. Условия парал-

лельности и перпендикулярности прямых на плоскости для различных видов уравнений.

13. Общее уравнение плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, перпендикулярно заданному вектору. Взаимное расположение двух плоскостей. Угол между плоскостями.

14. Каноническое уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через две различные точки. Параметрическое уравнение прямой. Прямая как линия пересечения плоскостей.

15. Взаимное расположение двух прямых, прямой и плоскости в пространстве.

16. Кривые второго порядка на плоскости: эллипс, гипербола, парабола. Выводы уравнений кривых второго порядка исходя из их геометрических свойств.

17. Исследование формы эллипса, гиперболы и параболы по их каноническим уравнениям. Эксцентриситет эллипса и гиперболы. Директрисы эллипса и гиперболы.

18. Поверхности второго порядка в пространстве: эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды, конусы, цилиндрические поверхности. Канонические уравнения поверхностей второго порядка. Примеры.

Часть 1.
Основные типы задач
для подготовки к контрольным работам и экзамену (зачету)

Часть 1 содержит основные типы задач по курсу алгебры и геометрии 1-го семестра для подготовки к двум контрольным работам и сдаче экзамена (зачета). Для полноценного усвоения материала рекомендуется выполнить все задачи части 1.

Задачи по теме «Алгебра матриц. Решение систем линейных уравнений»

№1. Найти матрицы $C = -8A + B^T$, $D = A^T - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

№2. Найти матрицу $C = BA$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Существует ли для заданных матриц произведение AB ?

№3. Найти матрицу $C = AB^T$, если

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

№4. Задана матрица *A*.

а) Вычислить определитель матрицы.

б) Если выполняется критерий существования обратной матрицы, найти обратную матрицу A^{-1}. Сделать проверку.

1	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	4	$A = 3B - 5C$, где $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
2	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$	5	$A = -2B$, где $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3	$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 6 & 2\\ -4 & -8 & -6\end{pmatrix}$	6	$A=(CB)^T$, где $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

№5. Определителем Вронского $W(x)$ системы функций $y_1(x), y_2(x),..., y_n(x)$ называется определитель

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}.$$

Вычислить определитель Вронского для заданной системы функций.

№		№	
1	$\{\sin^2 5x, \cos^2 5x\}, x\in R$	5	$\{chx, shx, 1\}, x\in R$
2	$\{e^{2x}\sin 3x, e^{2x}\cos 3x\} x\in R$	6	$\{1, e^{2x}, xe^{2x}\}, x\in R$,
3	$\{e^{4x}, e^{6x}, e^{7x}\}, x\in R$	7	$\{1, x, \sin x, \cos x\}, x\in R$
4	$\{\sin^2 x, \cos^2 x,\ 1\}, x\in R$	8	$\{1,\ \ln 2x,\ \ln x^3\}$, $x\in(0,+\infty)$

Вычислить определитель Вронского для системы функций в точке x_0.

№		№	
1	$\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$, $x_0=\ln 2$	3	$\{1,\ tgx,\ ctgx\}$, $x_0=\dfrac{\pi}{4}$
2	$\{x, \sin x,\ \cos x\}$, $x_0=\dfrac{\pi}{3}$	4	$\{\sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x\}$, $x_0=\dfrac{\pi}{2}$

№6. Решить матричное уравнение. Сделать проверку.

1	$AX=B$, где $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$	4	$AX=B$, где $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$
2	$XA=B$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}$	5	$XA=B$, где $A=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}-8 & 3 & 0\\ -5 & 9 & 0\\ -2 & 15 & 0\end{pmatrix}$
3	$XA=B$, где $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & -6\\ -2 & 4\\ 9 & 2\end{pmatrix}$	6	$AXC=B$, где $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

№7. Решить систему двумя способами: по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы.

1	$\begin{cases}x+2y=-3\\ 3x-5y=13\end{cases}$	3	$\begin{cases}2x_1+x_2=5\\ 2x_1+3x_3=16\\ 5x_2-x_3=10\end{cases}$
2	$\begin{cases}x_1+5x_2+x_3=2\\ 2x_1-x_2-4x_3=10\\ -x_1+3x_3=-6\end{cases}$	4	$\begin{cases}x_1+5x_2+x_3=4\\ 2x_1-x_2-4x_3=1\\ -x_1+3x_3=-8\end{cases}$

№8. Решить однородную систему линейных уравнений методом Гаусса. Сделать проверку.

1	$\begin{cases} 5x-2y=0 \\ 15x-6y=0 \end{cases}$	3	$\begin{cases} 2x_1+x_2=0 \\ 2x_1+3x_3=0 \\ 4x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1+5x_2+x_3=0 \\ 2x_1-5x_2-4x_3=0 \\ -3x_1+3x_3=0 \end{cases}$	4	$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3+3x_4=0 \\ 4x_1-x_2-2x_3+x_4=0 \\ 6x_1-x_2-3x_3-x_4=0 \\ 2x_1+2x_2-x_3-12x_4=0 \end{cases}$

№9. Решить неоднородную систему линейных уравнений методом Гаусса, выделить структуру общего решения системы. Сделать проверку.

1	$\begin{cases} 5x-2y=4 \\ 15x-6y=12 \end{cases}$	3	$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3-5x_4=1 \\ x_1-x_2-5x_3=2 \\ 3x_1-2x_2-2x_3-5x_4=3 \\ 7x_1-5x_2-9x_3-10x_4=8 \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0 \\ 4x_1-7x_2+3x_3+7x_4=1 \\ 2x_1-3x_2-x_3+x_4=1 \end{cases}$	4	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5=9 \\ x_2-x_4+x_5=2 \end{cases}$

Задачи по теме «Скалярное, векторное и смешанное произведения. Прямая и плоскость»

№1. Доказать, что четырехугольник с вершинами $A(2,1,4)$, $B(1,3,5)$, $C(7,2,3)$, $D(8,0,-6)$ является параллелограммом. Найти длины его сторон. Найти внутренний угол при вершине D.

№2. Даны вершины треугольника ABC : $A(2,3,-1)$, $B(1,-2,0)$, $C(-3,2,2)$. Найти внутренние углы треугольника и длины его сторон. Найти внешний угол треугольника при вершине *A*.

№3. Даны вершины треугольника $ABC : A(2,3,-1)$, $B(1,-2,0)$, $C(-3,2,2)$. Найти площадь треугольника ABC. Найти высоту, опущенную из вершины *A* на *BC*.

№4. Коллинеарны ли векторы $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{d} = 2\vec{b} - 4\vec{a}$, построенные на векторах $\vec{a}(1,-2,5)$ и $\vec{b}(3,-1,0)$?

№5. Установить, будут ли векторы компланарными:

$\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $b = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{c} = 14\vec{i} - 13\vec{j} + 7\vec{k}$.

№6. Определить, при каких α, β векторы $\vec{a} = (3,-5,\alpha)$ и $\vec{b} = (2,\beta,4)$ коллинеарны.

№7. В треугольнике с вершинами $A(3,-1,5)$; $B(4,2,-5)$ и $C(-4,0,3)$ найти длину медианы, проведенной из вершины *A*.

№8. Найти угол, образованный единичными векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известно, что векторы $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = 5\vec{p} - 4\vec{q}$ перпендикулярны.

№9. Найти объем тетраэдра с вершинами $A(-4,-4,-3)$, $B(-2,-1,1)$, $C(2,-2,-1)$ и $D(-1,3,-2)$.

№10. Даны вершины четырехугольника $A(-4,-3,-2)$, $B(2,-2,-3)$, $C(-8,-5,1)$ и $D(4,-3,-1)$. Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

№11. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = 5\vec{p} - 4\vec{q}$, если $\vec{p}(1,2,3)$, $\vec{q}(-2,3,1)$.

№12. Найти угол между двумя прямыми $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y+4}{-3} = \dfrac{z-2}{5}$ и

$$\begin{cases} x = -3 + 6t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 \end{cases}$$

№13. Даны вершины треугольника $A(1,-1,3)$, $B(3,-3,9)$, $C(-5,11,7)$. Составить каноническое и параметрическое уравнения средней линии, параллельной стороне *BC*. Составить каноническое и параметрическое уравнения медианы, проведенной к стороне *AB*.

№14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2,5,3)$ перпендикулярно плоскости $4x-3y+2z+7=0$.

№15. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1,1,1)$, $B(2,3,-1)$ параллельно вектору $\vec{a}=(0,3,-1)$.

№16. Найти угол между прямой $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{12}=\dfrac{z-1}{-3}$ и плоскостью $6x-3y+2z+1=0$.

№17. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,1,-1)$

перпендикулярно прямой $$\begin{cases} x=-2+3t \\ y=1-t \\ z=5 \end{cases}$$

№18. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,2,1)$ параллельно векторам $\vec{a}=(2,-3,4)$ и $\vec{b}=(3,2,-2)$.

№19. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2,1,3)$ параллельно плоскости $2x-3y+4z+5=0$.

№20. Даны вершины треугольника $A(7,1,6), B(1,-3,4), C(9,-3,5)$. Составить уравнение плоскости *ABC*.

№21. Составить каноническое и параметрическое уравнения прямой, проходящей через две точки $A(2,-1,33)$ и $B(-1,2,5)$.

№22. Найти проекцию точки $A(5,2,-1)$ на плоскость $2x-y+3z=-23$.

№23. Найти точку, симметричную точке $A(4,-3,1)$ относительно плоскости $x+2y-z-3=0$.

№24. Найти проекцию точки $A(4,3,10)$ на прямую $$\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+4t \\ z=3+5t \end{cases}.$$

Задачи по теме «Кривые и поверхности второго порядка»

№1. Составить уравнение эллипса с фокусами в точках $F_1(0,-3)$, $F_2(0,3)$ и большей полуосью, равной 5. Сделать чертеж.

№2. Установить, какую кривую определяет уравнение $4x^2 - 9y^2 = 36$. Найти ее фокусы и асимптоты. Сделать чертеж.

№3. Установить, какую кривую определяет уравнение $y^2 = 3x + 9$. Найти ее фокусы и директрису. Сделать чертеж.

№4. Составить уравнение гиперболы с фокусами в точках $F_1(0,-6)$, $F_2(0,6)$ и мнимой полуосью, равной 3. Найти асимптоты, сделать чертеж.

№5. Установить, какую кривую определяет уравнение $16x^2 - 9y^2 = 144$. Найти ее фокусы, асимптоты. Сделать чертеж.

№6. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(0,4)$ и директриса $y + 4 = 0$. Сделать чертеж.

№7. Установить, какую кривую определяет уравнение $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$. Сделать чертеж.

№8. Определить тип поверхности второго порядка, заданной уравнением. Сделать чертеж. Найти сечение поверхности заданной плоскостью.

	Уравнение поверхности	Уравнение плоскости
1	$x^2 - 4y^2 + 9z^2 - 36 = 0$	$z = 0$
2	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1$	$x = -4$
3	$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 0$	$z = 4$
4	$9x^2 + 4y^2 - 36z = 0$	$y = 0$
5	$25x^2 - y^2 - 9z^2 - 225 = 0$	$y = 0$

Дополнительные задачи

для подготовки к экзамену или зачету

(задачи повышенной трудности)

№1. Доказать, что $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$.

№2. Решить систему линейных уравнений при всех возможных значениях параметра t: $\begin{cases} 2x - y + 3z = -7 \\ x + 2y - 6z = t \\ tx + 5y - 15z = 8 \end{cases}$

№3. Исследовать систему линейных уравнений и найти общее решение в зависимости от параметра λ: $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 2 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

№4. Решить систему линейных уравнений при всех возможных значениях параметра t: $\begin{cases} tx + y + z = 0 \\ x + ty + z = 0 \\ x + y + tz = 0 \end{cases}$

№5. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

№6. Решить неравенство: $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$

№7. Построить однородную систему уравнений $AX = 0$ по заданной фундаментальной системе решений $e_1 = (-2,1,1,1)$, $e_2 = (0,1,2,0)$, $e_3 = (1,-1,0,1)$.

№8. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к оси OZ и вектор $\vec{a} = (8,-15,3)$ образует острый угол с осью *OX*. Зная, что $|\vec{x}| = 51$, найти координаты $\vec{x}$.

№9. Даны два вектора $\vec{a} = (8,4,1)$ и $\vec{b} = (2,-2,1)$. Найти вектор $\vec{c}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, перпендикулярный к вектору $\vec{a}$, равный ему по длине и образующий с вектором $\vec{b}$ тупой угол.

№10. При каком значении параметра t векторы $\vec{a} = (1,-2t,1)$; $\vec{b} = (1,t,0)$; $\vec{c} = (0,t,1)$ будут компланарны?

№11. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ равен 2. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c},\vec{a}-\vec{b},\vec{c}+\vec{b})$.

№12. При каком значении t прямая $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{t} = \frac{z}{1}$ параллельна прямой $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$?

№13. При каком значении параметра A плоскость $Ax+3y-5z+1=0$ параллельна прямой $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$?

№14. Показать, что прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2}$ и $\frac{x+1}{1} = \frac{y+11}{2} = \frac{z+6}{1}$ пересекаются, и найти точку пересечения.

№15. Даны вершины треугольника $A(7,1,6)$, $B(1,-3,4)$, $C(9,-3,5)$. Составить каноническое и параметрическое уравнения высоты, проведенной из вершины A.

№16. Найти расстояние от точки $M(7,9,7)$ до прямой $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$.

№17. Доказать, что прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ и $\frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}$ лежат в одной плоскости и составить уравнение этой плоскости.

№18. Установить взаимное расположение прямой и плоскости и, в случае их пересечения, найти координаты точки пересечения.

а) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ и $3x-3y+2z-5=0$;

б) $\dfrac{x-13}{8}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{3}$ и $x+2y-4z+1=0$;

с) $\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-5}{4}$ и $3x-y+2z-5=0$.

№19. Вывести уравнение эллипса, фокусы которого расположены в мнимых вершинах гиперболы $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=-1$, а большая полуось равна половине фокального расстояния этой гиперболы. Изобразить в одной системе координат данную гиперболу и эллипс с найденным уравнением.

№20. Вывести уравнение равносторонней гиперболы, симметричной относительно оси OX, фокусы которой располагаются на директрисе параболы $y^2=4x$, а мнимая полуось равна параметру этой параболы. Изобразить данную параболу и полученную гиперболу на одном чертеже. Имеют ли данные кривые точки пересечения?

№21. Привести уравнение гиперболы $9x^2-16y^2=-1$ к каноническому виду, найти координаты её фокусов и вершин, эксцентриситет и уравнения асимптот. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в фокусе гиперболы, а директриса проходит через действительную вершину. Рассмотреть все возможные случаи. Сделать чертёж: изобразить гиперболу и все параболы в одной системе координат.

№22. Уравнение поверхности второго порядка $9x^2+4y^2-z^2-18x+16y-11=0$ привести к каноническому виду. Определить тип поверхности и сделать чертеж. Установить по одну или по разные стороны от поверхности находятся точки $A(5,1,0)$ и $B(1,0,9)$?

№23. Уравнение поверхности второго порядка $x^2-16y^2-4z^2+6x+40z-107=0$ привести к каноническому виду. Определить тип поверхности и сделать чертеж. Найти сечения поверхности координатными плоскостями.

№24. Найти точки пересечения прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{1}$ и поверхности $9x^2+4y^2-36z^2-18x+16y+216z-335=0$.

№25. Определить тип поверхности второго порядка $x^2+16y^2+4z^2+6x-40z+93=0$. Найти сечения поверхности координатными плоскостями.

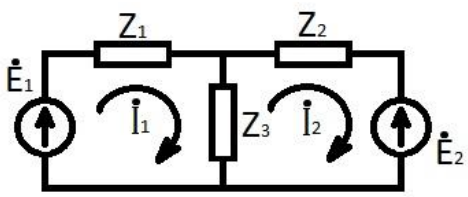
Прикладные задачи

Материал раздела «Векторы. Скалярное, векторное, смешанное произведения векторов» широко применяется при решении задач механики, физики. Задача №1 – это пример использования векторного произведения при решении задач механики.

№1. Кинетическим моментом системы материальных точек M_1, M_2 с массами m_1, m_2 и скоростями $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ относительно центра O называется вектор $\vec{I}=[\overrightarrow{OM}_1, m_1\overrightarrow{v_1}]+[\overrightarrow{OM}_2, m_2\overrightarrow{v_2}]$. Пусть $O(-2,-1,1)$, $m_1=2$, $m_2=3$, $M_1(-4,-4,-3)$, $M_2(2,-2,-1)$, $\vec{v}_1=(-2,3,1)$, $\vec{v}_2=(1,2,3)$. Найти кинетический момент системы материальных точек M_1, M_2 относительно центра O.

В электротехнике для расчета электрических схем используется метод контурных токов. Применение этого метода приводит к решению систем линейных уравнений. Задачи №2 и №3 – простейшие примеры использования систем линейных уравнений и методов их решения в электротехнике и физике.

№2. Для заданной электрической схемы с двумя независимыми контурами



на основе второго закона Кирхгофа составляется следующая система уравнений $\begin{cases} \dot{E}_1 = (Z_1 + Z_3)\dot{I}_1 - Z_3\dot{I}_2 \\ -\dot{E}_2 = -Z_3\dot{I}_1 + (Z_2 + Z_3)\dot{I}_2 \end{cases}$. Найти расчетную формулу для контурных токов $\dot{I}_1, \dot{I}_2$.

№3. На основе закона Био-Савара-Лапласа и закона Ампера можно показать, что элементарный ток $I_1\overrightarrow{\Delta l_1}$ в точке M_1 действует на элементарный ток $I_2\overrightarrow{\Delta l_2}$ в точке M_2 с силой $\overrightarrow{\Delta F} = k[I_2\overrightarrow{\Delta l_2},[I_1\overrightarrow{\Delta l_1},\overrightarrow{M_1M_2}]]$, где $k>0$ – некоторая константа. Используя свойства векторного произведения, показать, что параллельные одинаково направленные токи притягиваются друг к другу.

Для решения целого ряда экономических задач широко используется материал разделов «Алгебра матриц», «Решение матричных уравнений».

Приведем примеры таких задач (№4 – №9).

№**4** . Предприятие выпускает продукцию трех видов (i = 1, 2,3), используя при этом два вида сырья (j = 1, 2). Пусть нормы расхода сырья характеризуются матрицей с элементами a_{ij} : $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$. Стоимость единицы каждого типа сырья задается матрицей $P = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$, план выпуска продукции — матрицей B = (100 200 300). Определить затраты и общую стоимость сырья, необходимые для данного планового выпуска продукции.

<u>*Указание*</u>. Затраты сырья находят по формуле $S = BA$. Общую стоимость сырья вычисляют по формуле $Q = SP$.

№**5** . Завод изготавливает продукцию четырех типов, используя при этом два вида ресурсов. Нормы затрат ресурсов характеризуются матрицей

$A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 10 & 3\\ 8 & 6 & 4 & 9\end{pmatrix}^T$. Стоимость единицы каждого типа ресурса задается матрицей $P=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$, план выпуска продукции — матрицей $B=\begin{pmatrix}100 & 80 & 230 & 150\end{pmatrix}$. Определить затраты и общую стоимость ресурсов, необходимые для данного планового выпуска продукции.

Задачи №6 и №7 – задачи на использование математической модели межотраслевого баланса В.В. Леонтьева.

№**6** . В следующей таблице представлен балансовый отчет для двухотраслевой модели экономики.

Отрасль	Потребление продукции		Валовой выпуск
	Энергетика	Машиностроение	
Энергетика	$x_{11}=100$	$x_{12}=160$	$X_1=500$
Машиностроение	$x_{21}=275$	$x_{22}=40$	$X_2=400$

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли X, обеспечивающий вектор выпуска конечной продукции $Y=\begin{pmatrix}200\\100\end{pmatrix}$.

Указание. Составить матрицу прямых затрат $A=\|a_{ij}\|$, где $a_{ij}=\dfrac{x_{ij}}{x_j}$. Необходимый объем валового выпуска X является решением матричного уравнения $(E-A)\cdot X=Y$. Отметим, что матрица полных затрат — это матрица $S=(E-A)^{-1}$.

№**7** . В следующей таблице представлен балансовый отчет для трехотраслевой модели экономики.

Отрасль	Потребление продукции			Валовой выпуск
	1	2	3	
1	$x_{11} = 79$	$x_{12} = 106$	$x_{13} = 300$	$X_1 = 790$
2	$x_{21} = 237$	$x_{22} = 212$	$x_{23} = 75$	$X_2 = 530$
3	$x_{31} = 158$	$x_{32} = 53$	$x_{33} = 150$	$X_2 = 750$

Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли X, обеспечивающий вектор выпуска конечной продукции $Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 400 \end{pmatrix}$.

Задачи №8 и №9– задачи на использование математической модели международной торговли.

№**8** **.** Структурная матрица торговли двух стран имеет вид

$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Найти отношение национальных доходов $S_1 : S_2$ двух стран, чтобы торговля была сбалансированной.

Указание. Решить матричное уравнение $AX = X$, где $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Сбалансированность торговли двух стран достигается, если $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{a_1}{a_2}$ (условие сбалансированности международной торговли).

№**9** **.** Структурная матрица торговли трех стран имеет вид

$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Найти отношение национальных доходов $S_1 : S_2 : S_3$ трех стран для сбалансированной торговли.

<u>*Указание*</u>. Вектор национальных доходов $\overline{S} = (S_1, S_2, S_3)^T$ должен быть пропорционален решению матричного уравнения $AX = X$, где $X = (a_1 \quad a_2 \quad a_3)^T$.

Часть 2. Типовой расчет

Решение задач типового расчета позволяет студенту успешно подготовиться к выполнению контрольных работ и сдаче экзамена (зачета). В *контрольную работу №1* входят задачи, аналогичные *задачам 2.1-2.4*.

В *контрольную работу №2* входят задачи, аналогичные *задачам 2. 5, 2.6, 2.7, 2.9, 2.10.*

Выполнение типового расчета является необходимым условием допуска студента на экзамен или зачет.

Задачи по теме «Алгебра матриц. Системы линейных уравнений»

<u>Задача 2.1.</u> Вычислить определитель матрицы.

Вариант		Вариант	
1.	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$	16.	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

2.	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$	17.	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$
3.	$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$	18.	$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
4.	$\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$	19.	$\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$
5.	$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$	20.	$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$
6.	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$	21.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$
7.	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$	22.	$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$

8.	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$	23.	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$
9.	$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$	24.	$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$
10.	$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$	25.	$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
11.	$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$	26.	$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$
12.	$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$	27.	$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$
13.	$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$	28.	$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

14.	$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$	29.	$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$
15.	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$	30.	$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

Задача 2.2. Решить матричное уравнение $AX=B$ для нечетных вариантов, $XA=B$ – для четных вариантов. Сделать проверку.

Вари-ант	Матрица A	Матрица B	Вари-ант	Матрица A	Матрица B
1	$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -12 \\ -5 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & -2 & -14 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -7 & 10 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

7	$\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ 10 & 5 & 9 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} -6 & -7 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 13 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 11 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & -9 \\ 7 & -12 & 15 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 13 & 6 \\ 3 & -2 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -6 \\ -4 & 12 & -8 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 7 & -8 & 11 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} -8 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 & -9 & 7 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 5 & -8 \\ 11 & -12 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -7 & 11 \\ -3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$

21	$\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -5 & -6 & 7 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 3 \\ 8 & 5 & -7 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -4 & 3 \\ 1 & -11 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -9 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -7 & -2 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 6 & 9 \\ 5 & -2 & -10 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -5 & -1 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 8 & 4 & 10 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -7 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$

Задача 2.3. Проверить совместность системы уравнений и, в случае совместности, решить ее двумя методами:

a) по формулам Крамера;
b) с помощью обратной матрицы (при нахождении обратной матрицы проверка обязательна).

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33 \\ 7x_1 - 5x_2 = 24 \\ 4x_1 + 11x_3 = 39 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \\ 5x_2 + 4x_3 = -20 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

18. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 81 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 99 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 171 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2 \\ 3x_2 - 7x_3 = -6 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10 \end{cases}$

Задача 2.4. Решить неоднородную систему линейных уравнений методом Гаусса. Выделить общее решение однородной системы и частное решение неоднородной системы. Сделать проверку.

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_4 = -3 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 7x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_4 = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = -1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + 3x_4 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 15 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -4 \\ -2x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 12x_3 - x_4 = 9 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 8 \end{cases}$

8. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 3 \\ -3x_1 + 2x_2 + 7x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -5 \\ -2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 5 \\ -3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 8x_4 = -8 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 7x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - 8x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + 6x_3 + 2x_4 = 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 20 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 - 10x_4 = 5 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = -9 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_4 = -7 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 5 \\ -2x_1 + 3x_2 + 8x_4 = -2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 8 \end{cases}$

18. $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_4 = 5 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 = 3 \end{cases}$

20. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 11 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 9x_4 = -2 \end{cases}$

21. $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 6x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 11x_4 = 11 \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 \qquad - x_4 = 3 \\ 3x_1 - 8x_2 - 7x_3 - 2x_4 = -1 \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 3 \\ -3x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 6x_4 = -5 \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + \qquad 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 - x_4 = 7 \\ 3x_1 - 14x_2 + 5x_3 + 11x_4 = -2 \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 7x_4 = -5 \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 11x_4 = 7 \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 7x_4 = -4 \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 7x_2 \qquad - 2x_4 = 5 \\ -3x_1 + 11x_2 + 5x_3 + 2x_4 = -9 \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = 2 \\ -2x_1 - 3x_2 \qquad - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -4 \end{cases}$$

29. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_4 = 2 \\ -3x_1 + 4x_2 + 15x_3 - 9x_4 = -9 \end{cases}$

30. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 - 13x_4 = -4 \end{cases}$

Задачи по теме «Векторы. Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов»

Задача 2.5. Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

1) Проверить на коллинеарность и ортогональность два вектора, указанные в столбце **1.1**.

2) Проверить, будут ли компланарны три вектора, указанные в столбце **1.2**.

Вариант	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	**1.1**	**1.2**
1	$3i+4j+k$	$i-2j+7k$	$3i-6j+21k$	$\vec{b}, \vec{c}$	$2\vec{a}, -3\vec{b}, \vec{c}$
2	$2i-3j+k$	$j+4k$	$5i+2j-3k$	$\vec{a}, \vec{c}$	$\vec{a},\ 2\vec{b},\ 3\vec{c}$
3	$2i-4j-2k$	$7i+3j$	$5i+2j-7k$	$\vec{a}, \vec{c}$	$3\vec{a},\ 2\vec{b},\ 3\vec{c}$
4	$-7i+2k$	$2i-6j+4k$	$i-3j+2k$	$\vec{b}, \vec{c}$	$2\vec{a}, 4\vec{b}, 3\vec{c}$
5	$-4i+2j-k$	$3i+5j-2k$	$j+5k$	$\vec{a}, \vec{b}$	$\vec{a},\ 6\vec{b},\ 3\vec{c}$
6	$3i-2j+k$	$2j-3k$	$-3i+2j-k$	$\vec{a}, \vec{c}$	$5\overrightarrow{a},\ 4\vec{b},\ 3\vec{c}$
7	$4i-j+3k$	$2i+j-5k$	$7i+2j+4k$	$\vec{b}, \vec{c}$	$7\vec{a},\ 2\vec{b}, 5\vec{c}$
8	$4i+2j-3k$	$2i+k$	$-12i-6j+9k$	$\vec{a}, \vec{c}$	$2\vec{a},\ 3\vec{b}, -4\vec{c}$
9	$-i+5k$	$-3i+2j+2k$	$-2i-4j+k$	$\vec{b}, \vec{c}$	$7\vec{a},\ 2\vec{b}, -3\vec{c}$
10	$6i-4j+6k$	$9i-6j+9k$	$i-8k$	$\vec{a}, \vec{b}$	$3\vec{a}, -4\vec{b}, -9\vec{c}$
11	$5i-3j+4k$	$2i-4j-2k$	$3i+5j-7k$	$\vec{b}, \vec{c}$	$\vec{a}, -2\vec{b}, 6\vec{c}$
12	$-4i+3j-7k$	$4i+6j-2k$	$6i+9j-3k$	$\vec{b}, \vec{c}$	$-2\vec{a},\ 4\vec{b}, 7\vec{c}$
13	$-5i+2j-2k$	$7i-5k$	$2i+3j-2k$	$\vec{a}, \vec{c}$	$8\vec{a}, -3\vec{b}, 11\vec{c}$
14	$-4i-6j+2k$	$2i+3j-k$	$-i+5j-3k$	$\vec{a}, \vec{b}$	$3\vec{a},\ 7\vec{b}, -2\vec{c}$
15	$-4i+2j-3k$	$-3j+5k$	$6i+6j-4k$	$\vec{a}, \vec{c}$	$3\vec{a}, -9\vec{b}, 4\vec{c}$

16	-3***i*** +8***j***	2***i***+3***j***-2***k***	8***i***+12***j***-8***k***	$\vec{b},\vec{c}$	$4\vec{a},-6\vec{b}\,,9\vec{c}$
17	2***i*** -4***j***-2***k***	-9***i***+2***k***	3***i***+5***j***-7***k***	$\vec{a},\vec{c}$	$7\vec{a},\ 5\vec{b}\,,-\vec{c}$
18	9***i*** -3***j***+***k***	3***i***-15***j***+21***k***	***i***-5***j***+7***k***	$\vec{b},\vec{c}$	$2\vec{a},-7\vec{b}\,,4\vec{c}$
19	-2***i*** +4***j***-3***k***	5***i***+***j***-2***k***	7***i***+4***j***-***k***	$\vec{a},\vec{b}$	$\vec{a},-6\vec{b}\,,5\vec{c}$
20	-9***i*** +4***j***-5***k***	***i***-2***j***+4***k***	-5***i***+10***j***-20***k***	$\vec{b},\vec{c}$	$-2\vec{a},7\vec{b}\,,4\vec{c}$
21	2***i*** -7***j***+5***k***	- ***i***+2***j***-6***k***	3***i***+2***j***-4***k***	$\vec{b},\vec{c}$	$7\vec{a},-4\vec{b}\,,3\vec{c}$
22	7***i*** -4***j***-5***k***	***i***-11***j***+3***k***	5***i***+5***j***+3***k***	$\vec{a},\vec{c}$	$-4\vec{a},2\vec{b}\,,6\vec{c}$
23	4***i*** -6***j***-2***k***	-2***i***+3***j***+***k***	3***i***-5***j***+7***k***	$\vec{a},\vec{b}$	$-5\vec{a},3\vec{b}\,,4\vec{c}$
24	3***i*** –***j***+2***k***	-***i***+5***j***-4***k***	6***i***-2***j***+4***k***	$\vec{a},\vec{c}$	$6\vec{a},-7\vec{b}\,,-2\vec{c}$
25	-3***i*** –***j***-5***k***	2***i***-4***j***+8***k***	3***i***+7***j***-***k***	$\vec{b},\vec{c}$	$2\vec{a},5\vec{b}\,,-6\vec{c}$
26	-3***i*** +2***j***+7***k***	***i***-5***k***	6***i***+4***j***-***k***	$\vec{a},\vec{c}$	$-2\vec{a},3\vec{b}\,,7\vec{c}$
27	3***i*** -***j***+5***k***	2***i***-4***j***+6***k***	***i***-2***j***+3***k***	$\vec{b},\vec{c}$	$-3\vec{a},4\vec{b},-5\vec{c}$
28	4***i*** -5***j***-4***k***	5***i***- ***j***	2***i***+4***j*** -3***k***	$\vec{a},\vec{c}$	$-3\vec{a},4\vec{b},8\vec{c}$
29	-9***i*** +4***k***	2***i***-4***j***+6***k***	3***i***-6***j***+9***k***	$\vec{b},\vec{c}$	$3\vec{a},6\vec{b},-4\vec{c}$
30	5***i*** -6***j***-4***k***	4***i***+8***j***-7***k***	3***j***-4***k***	$\vec{a},\vec{b}$	$5\vec{a},4\vec{b},-2\vec{c}$

Задача 2. 6. Доказать, что векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют базис в пространстве V_3. Найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Вариант	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$	$\vec{d}$
1	(5, 4, 1)	(-3, 5, 2)	(2, -1, 3)	(7, 23, 4)
2	(2, -1, 4)	(-3, 0, -2)	(4, 5, -3)	(0, 11, -14)
3	(-1, 1, 2)	(2, -3, -5)	(-6, 3 ,-1)	(28, -19, -7)
4	(1, 3, 4)	(-2, 5, 0)	(3, -2, -4)	(13, -5, -4)
5	(1, -1, 1)	(-5, -3, 1)	(2, -1, 0)	(-15, -10, 5)
6	(3, 2, 1)	(-7, -2, -4)	(-4, 0, 3)	(16, 6, 15)
7	(-3, 0, 1)	(2, 7, -3)	(-4, 3, 5)	(-16, 33, 13)
8	(5, 1, 2)	(-2, 1, -3)	(4, -3, 5)	(15, -15, 24)
9	(0, 2, -3)	(4, -3, -2)	(-5, -4, 0)	(-19, -5, -4)
10	(3, -1, 2)	(-2, 3, 1)	(4, -5, -3)	(-3, 2, -3)
11	(5, 3, 1)	(-1, 2, -3)	(3, -4, 2)	(-9, 34, -20)
12	(3, 1, -3)	(-2, 4, 1)	(1, -2, 5)	(1, 12, -20)
13	(6, 1, -3)	(-3, 2, 1)	(-1, -3, 4)	(15, 6, -17)

14	(4, 2, 3)	(-3, 1, -8)	(2, -4, 5)	(-12, 14, -31)
15	(-2, 1, 3)	(3, -6, 2)	(-5, -3, -1)	(31, -6, 22)
16	(1, 3, 6)	(-3, 4, -5)	(1, -7, 2)	(-2, 17, 5)
17	(7, 2, 1)	(5, 1, -2)	(-3, 4, 5)	(26, 11, 1)
18	(3, 5, 4)	(-2, 7, -5)	(6, -2, 1)	(6, -9, 22)
19	(5, 3, 2)	(2, -5, 1)	(-7, 4, -3)	(36, 1, 15)
20	(11, 1, 2)	(-3, 3, 4)	(-4, -2, 7)	(-5, 11, -15)
21	(9, 5, 3)	(-3, 2, 1)	(4, -7, 4)	(-10, -13, 8)
22	(7, 2, 1)	(3, -5, 6)	(-4, 3, -4)	(-1, 18, -16)
23	(1, 2, 3)	(-5, 3, -1)	(-6, 4, 5)	(-4, 11, 20)
24	(-2, 5, 1)	(3, 2, -7)	(4, -3, 2)	(-4, 22, -13)
25	(3, 1, 2)	(-4, 3, -1)	(2, 3, 4)	(14, 14, 20)
26	(3, -1, 2)	(-2, 4, 1)	(4, -5, -1)	(-5, 11, 1)
27	(4, 5, 1)	(1, 3, 1)	(-3, -6, 7)	(19, 33, 0)
28	(1, -3, 1)	(-2, -4, 3)	(0, -2, 3)	(-8, -10, 13)
29	(5, 7, -2)	(-3, 1, 3)	(1, -4, 6)	(14, 9, -1)
30	(-1, 4, 3)	(3, 2, -4)	(-2, -7, 1)	(6, 20, -3)

Задача 2.7. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*.

Найти:

1) внутренний угол *A* треугольника *ABC*;
2) площадь треугольника *ABC*;
3) объем пирамиды *ABCD*;
4) длину высоты, опущенной из вершины *D* пирамиды *ABCD*.

Вариант				
1	A (1, 2, 1)	B (-1, 2, 4)	C (2, 0, 6)	D (-2, 5, -1)
2	A (0, 1, 2)	B (2, 3, -4)	C (-1, 2, 5)	D (-3, 1, -1)
3	A (0, 2, 3)	B (3, 1, 2)	C (1, 3, -1)	D (4, -1, -3)
4	A (1, 0, 3)	B (6, -5, 2)	C (0, 2, 3)	D (6, 5, 1)
5	A (1, 1, 0)	B (3, 2, -5)	C (3, 3, -2)	D (5, 3, -2)
6	A (6, 0, 4)	B (0, 6, 4)	C (4, 6, 0)	D (0, -6, 4)

7	A (3, 2, 4)	B (2, 4, 3)	C (4, 3, -1)	D (4, -2, 3)
8	A (6, -3, 5)	B (5, -6, 3)	C (9, -1, 6)	D (5, -1, 2)
9	A (1, -1, 6)	B (4, 5, -2)	C (-1, 3, 0)	D (1, 2, 5)
10	A (4, 2, 2)	B (3, 0, 4)	C (0, 2, 3)	D (5, -2, -4)
11	A (-2, 3, 2)	B (-3, 0, 4)	C (0, 2 , 3)	D (1, 2, -4)
12	A (4, 2, -1)	B (3, 0, 4)	C (1, 2, 1)	D (2, 8, 4)
13	A (1, 2, 3)	B (-1, 2, -3)	C (-2, 3, 1)	D (7, 5, 9)
14	A (3, 5, 4)	B (8, 7, 4)	C (5, 10, 3)	D (4, 7, 8)
15	A (2, -8, -1)	B (4, -6, 0)	C (-2, -5, -1)	D (7, -10, 3)
16	A (4, 6, 5)	B (6, 9, 4)	C (7, 5, 9)	D (4, 10, 9)
17	A (6, 6, 5)	B (4, 9, 5)	C (4, 6, 11)	D (5, 9, 3)
18	A (8, 6, 4)	B (10, 5, 5)	C (5, 6, 8)	D (8, 10, -7)
19	A (7, 2, 2)	B (5, 7, 7)	C (5, 3, 1)	D (2, 3, 7)
20	A (7, 7, 3)	B (6, 5, 8)	C (3, 6, 7)	D (8, 4, 1)
21	A (4, 0, 0)	B (-2, 1, 2)	C (1, 3, 2)	D (3, 2, 7)
22	A (-2, 1,2)	B (4, 0, 1)	C (3, 2, -3)	D (1, 3, 2)
23	A (1, 3, 2)	B (3, 2, 7)	C (4, 0, 1)	D (-2, 1, -2)
24	A (3, 2, 7)	B (1, 3, 2)	C (-2, 1, 3)	D (4, -2, 3)
25	A (3, 1, -2)	B (1, -2, 1)	C (-2, 1, 0)	D (2, 2, 5)
26	A (1, -2, 1)	B (3, 1, -2)	C (2, 2, 5)	D (-2, 1, 0)
27	A (-3, 2, 1)	B (-2, 1, 0)	C (1, -2, 1)	D (3, 1, 2)
28	A (3, 1, -2)	B (1, -2, 1)	C (-2, 1, 2)	D (-2, 1, 0)
29	A (-3, 1, 2)	B (-2, 1, 1)	C (1, -2, 3)	D (3, 2, 1)
30	A (2, -1, 1)	B (-2, 2, 5)	C (3, 2, 1)	D (1, 2, -1)

<u>Задача 2.8</u>. Пользуясь свойствами скалярного и векторного произведений, вычислить угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и площадь параллелограмма, построенного на этих векторах. Угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен α .

Вариант	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\lvert\vec{p}\rvert$	$\lvert\vec{q}\rvert$	α
1	$\vec{p}+2\vec{q}$	$3\vec{p}-\vec{q}$	2	1	$\pi/3$
2	$\vec{p}-2\vec{q}$	$\vec{p}+3\vec{q}$	3	2	$2\pi/3$
3	$\overrightarrow{3p}-\vec{q}$	$\vec{p}-\overrightarrow{2q}$	1	4	$\pi/3$
4	$4\vec{p}+2\vec{q}$	$3\vec{p}-\vec{q}$	1	1	$2\pi/3$
5	$7\vec{p}+\vec{q}$	$3\vec{p}-\vec{q}$	2	1	$\pi/3$
6	$\vec{p}+2\vec{q}$	$\vec{p}-\vec{q}$	3	2	$2\pi/3$
7	$\vec{p}+2\vec{q}$	$3\vec{p}+\vec{q}$	2	4	$\pi/3$
8	$\vec{p}+2\vec{q}$	$\vec{p}+\vec{q}$	4	3	$2\pi/3$
9	$\vec{p}-5\vec{q}$	$-\vec{p}+\vec{q}$	4	3	$\pi/3$
10	$\vec{p}-5\vec{q}$	$-3\vec{p}+\vec{q}$	2	5	$2\pi/3$
11	$-2\vec{p}+\vec{q}$	$3\vec{p}+\vec{q}$	1	2	$\pi/3$
12	$\vec{p}-2\vec{q}$	$-2\vec{p}+\vec{q}$	5	4	$2\pi/3$
13	$\vec{p}+\vec{q}$	$-4\vec{p}+\vec{q}$	4	1	$\pi/3$
14	$\vec{p}-8\vec{q}$	$-2\vec{p}-\vec{q}$	4	5	$2\pi/3$
15	$-3\vec{p}+\vec{q}$	$\vec{p}+6\vec{q}$	5	1	$\pi/3$
16	$-2\vec{p}-\vec{q}$	$\vec{p}-10\vec{q}$	4	3	$2\pi/3$
17	$-3\vec{p}+2\vec{q}$	$-2\vec{p}+7\vec{q}$	1	5	$\pi/3$
18	$-2\vec{p}+\vec{q}$	$-2\vec{p}-3\vec{q}$	3	4	$2\pi/3$
19	$-2\vec{p}+\vec{q}$	$-3\vec{p}+\vec{q}$	2	5	$\pi/3$
20	$-2\vec{p}-\vec{q}$	$3\vec{p}-\vec{q}$	3	5	$2\pi/3$
21	$-5\vec{p}+\vec{q}$	$-\vec{p}-8\vec{q}$	5	2	$\pi/3$
22	$-\vec{p}+\vec{q}$	$-3\vec{p}+\vec{q}$	5	3	$2\pi/3$
23	$-\vec{p}+\vec{q}$	$-5\vec{p}-\vec{q}$	1	6	$\pi/3$
24	$-5\vec{p}+\vec{q}$	$6\vec{p}-\vec{q}$	2	7	$2\pi/3$
25	$-2\vec{p}+3\vec{q}$	$-2\vec{p}+5\vec{q}$	7	5	$\pi/3$

26	$-\vec{p}+\vec{q}$	$\vec{p}-5\vec{q}$	3	7	$2\pi/3$
27	$-2\vec{p}+\vec{q}$	$-3\vec{p}+4\vec{q}$	2	6	$\pi/3$
28	$-2\vec{p}+9\vec{q}$	$-8\vec{p}-\vec{q}$	3	4	$2\pi/3$
29	$-7\vec{p}+\vec{q}$	$-6\vec{p}-\vec{q}$	4	2	$\pi/3$
30	$-2\vec{p}+\vec{q}$	$\vec{p}-4\vec{q}$	5	2	$2\pi/3$

Задачи по теме «Прямая и плоскость»

Задача 2.9. Даны вершины треугольника A, B, C на плоскости.
Найти:

1) каноническое уравнение прямой AB;
2) уравнение высоты CH (общее и с угловым коэффициентом);
3) параметрическое уравнение медианы AM;
4) координаты точки N пересечения медианы AM и высоты CH;
5) длину высоты CH;
6) координаты точки K пересечения медиан треугольника ABC.

Вариант			
1	A (-2, 4)	B (3, 1)	C (10, 7)
2	A (-3, -2)	B (14, 4)	C (6, 8)
3	A (1, 7)	B (-3, -1)	C (11, -3)
4	A (1, 0)	B (-1, 4)	C (9, 5)
5	A (1, -2)	B (7, 1)	C (3, 7)
6	A (-4, 2)	B (-6, 6)	C (6, 2)
7	A (-2, -3)	B (1, 6)	C (6, 1)
8	A (4, -3)	B (7, 3)	C (1, 10)
9	A (4, -4)	B (8, 2)	C (3, 8)
10	A (-3, -3)	B (5, -7)	C (7, 7)

11	A (1, -6)	B (3, 4)	C (-3, 3)
12	A (-4, 2)	B (8, -6)	C (2, 6)
13	A (-5, 2)	B (0, -4)	C (5, 7)
14	A (4, -4)	B (6, 2)	C (-1, 8)
15	A (-3, 8)	B (-6, 2)	C (0, -5)
16	A (6, -9)	B (10, -1)	C (-4, 1)
17	A (4, 1)	B (-3, -1)	C (7, -3)
18	A (-4, 2)	B (6, -4)	C (4, 10)
19	A (3, -1)	B (11, 3)	C (-6, 2)
20	A (-7, -2)	B (-7; 4)	C (5, -5)
21	A (-1, -4)	B (9; 6)	C (-5, 4)
22	A (10, -2)	B (4, -5)	C (-3, 1)
23	A (-3, -1)	B (-4, -5)	C (8, 1)
24	A (-2, -6)	B (-3, 5)	C (4, 0)
25	A (-7, -2)	B (3, -8)	C (-4, 6)
26	A (0, 2)	B (-7, -4)	C (3, 2)
27	A (7, 0)	B (1, 4)	C (-8, -4)
28	A (1, -3)	B (0, 7)	C (-2, 4)
29	A (-5, 1)	B (8, -2)	C (1, 4)
30	A (2, 5)	B (-3, 1)	C (0, 4)

Задача 2.10. Для точек A,B,C,D ***из задачи 2.7*** составить уравнение:

1) плоскости ABC;
2) высоты, опущенной из вершины D пирамиды $ABCD$;
3) плоскости, проходящей через точку D, перпендикулярно прямой AB.

Для точек *A,B,C,D* ***из задачи 2.7*** вычислить:
4) синус угла между прямой *AD* и плоскостью *ABC*;
5) косинус угла между плоскостью *ABC* и координатной плоскостью *XOY*;
6) косинус угла между прямыми *AB* и *AD*.

Задача 2.11*. Найти
- для нечетных вариантов: проекцию точки M на прямую L, расстояние от точки M до прямой L, точку N, симметричную точке M относительно прямой;
- для четных вариантов : проекцию точки M на плоскость P,расстояние от точки M до плоскости P, точку N, симметричную точке M относительно плоскости P .

Вариант

1. M (2,-2,-1), L: $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1/2}{1}=\frac{z-1/2}{-1}$
2. M (1,0,2), P: 2x+4y+4z-1=0
3. M (1,3,-1), L: $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1/2}{0}=\frac{z+2}{-1}$
4. M (2,1,-1), P: 4x+8y-2z-1=0
5. M (-1,2.3), L: $\frac{x+5/2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1/2}{0}$
6. M (1,-2,3), P: 2x-4y-5=0
7. M (1,0,1), L: $\frac{x+3/2}{2}=\frac{y-8/3}{-3}=\frac{z}{1}$
8. M (1,0,2), P: x+y+2z-2=0
9. M (-2,2,2), L: $\frac{x+2}{0}=\frac{y-3/2}{2}=\frac{z+3/2}{-1}$
10. M (3,-1,-2), P: 2x-3y=1=0
11. M (-1,-1,-3), L: $\frac{x-3/2}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z+3}{-2}$
12. M (-2,0,1), P: 4y+2z+1=0
13. M (3,1,-2), L: $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-5/2}{4}=\frac{z-3}{2}$
14. M (1,-3,-2), P: 2x-4y+4z+3=0
15. M (-3,1,-2), L: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+3/2}{5}=\frac{z+5/4}{2}$

16. M (0,-1,2), P: 4x-2y+4z-1=0
17. M (1,2,-2), L: $\frac{x-1/2}{1}=\frac{y+1/2}{-1}=\frac{z+2}{0}$
18. M (1,3,-1), P: 8x+10y+8z+27=0
19. M (3,-1,1), L: $\frac{x-4/3}{1}=\frac{y-2/3}{3}=\frac{z+2/3}{-5}$
20. M (-2,3,1), P: x-2z-1=0
21. M (-3,1,-1), L: $\frac{x-1}{0}=\frac{y+2/3}{0}=\frac{z+3/2}{-1}$
22. M (3,1,-3), P: 2y-4z-9=0
23. M (-1,-1, 3), L: $\frac{x-11/2}{-2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z}{-1}$
24. M (0, 2,-2), P: 2x-4y+3=0
25. M (-1,1,1), L: $\frac{x-1/2}{2}=\frac{y+4}{-5}=\frac{z+3/2}{-2}$
26. M (2, 1,-3), P: x+2y-z-1=0
27. M (0,-3,-2), L: $\frac{x+3/4}{2}=\frac{y-3/2}{-1}=\frac{z+5/4}{2}$
28. M (-3, 2,-1), P: 2x-y+z+6=0
29. M (1,-1, 2), L: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1}$
30. M (1, 0,-2), P: 3x-y+z+10=0

Задачи по теме «Кривые и поверхности второго порядка»

Задача 2.12. Составить канонические уравнения кривых второго порядка, сделать чертеж.

Для случая эллипса заданы: F - фокус, a - большая полуось, b- малая полуось. Для случая гиперболы заданы: F - фокус, a - действительная полуось, b - мнимая полуось. Для случая параболы: вершина параболы находится в точке $O(0,0)$, D - директриса, заданная указанным уравнением.

Вариант	Эллипс	Гипербола	Парабола
1	b=15; F_1(-10,0); F_2(2,0)	a=4; F_1(-3,0); F_2(7,0)	D: x= 3
2	b=2; F_1(0,-4); F_2(0,6)	b=3; F_1(-7,0); F_2(1,0)	D: y= 2
3	a=4; F_1(-3,2); F_2(3,2)	b=3; F_1(0,0); F_2(0,10)	D: y= -1
4	b=3; F_1(-4,-1); F_2(4,-1)	a=5; F_1(0,-15); F_2(0,1)	D: x= -1
5	b=2; F_1(5,3); F_2(5,-3)	b=4; F_1(3,-5); F_2(3,5)	D: x= 1
6	a=7; F_1(-6,0); F_2(0,0)	a=3; F_1(-7,2); F_2(7,2)	D: y= 7
7	b=4; F_1(-5,3); F_2(5,3)	a=5; F_1(-12,0); F_2(6,0)	D: y= - 5
8	b=2; F_1(7,-1); F_2(7,1)	a=2; F_1(0,-10); F_2(0,2)	D: x= - 3
9	a=6; F_1(-4,-6); F_2(4,-6)	b=4; F_1(-9,0); F_2(7,0)	D: x= 4
10	b=2; F_1(0,1); F_2(0,7)	b=9; F_1(0,-6); F_2(0,16)	D: y= - 2
11	a=8; F_1(-2,0); F_2(8,0)	b=2; F_1(-4,-3); F_2(-4,3)	D: x= - 8
12	b=5; F_1(-2,-2); F_2(-2,2)	a=4; F_1(-2,0); F_2(12,0)	D: y= 3,5
13	a=5; F_1(2,-4); F_2(2,4)	b=6; F_1(-10,-4); F_2(10,-4)	D: y= - 6
14	a=9; F_1(-3,5); F_2(3,5)	a=6; F_1(-13,0); F_2(9,0)	D: x= - 9
15	b=3; F_1(0,0); F_2(0,-4)	b=5; F_1(0,1); F_2(0,13)	D: x= 0,5
16	b=6; F_1(-9,0); F_2(-1,0)	a=3; F_1(6,-4); F_2(6,4)	D: y= 1
17	a=4; F_1(-1,-3); F_2(1,-3)	b=7; F_1(0,-10); F_2(0,8)	D: x= 2,5
18	b=3; F_1(-1,7); F_2(1,7)	b=5; F_1(-3,0); F_2(13,0)	D: y= -10
19	a=7; F_1(0,2); F_2(0,-10)	a=3; F_1(-5,1); F_2(5,1)	D: y= 17
20	a=10; F_1(-6,-6); F_2(-6,6)	a=8; F_1(0,-14); F_2(0,6)	D: x= -6
21	b=4; F_1(0,3); F_2(0,9)	b=4; F_1(-2,-5); F_2(-2,5)	D: x= -1,5
22	b=7; F_1(-4,0); F_2(6,0)	b=4; F_1(-7,5); F_2(7,5)	D: y= 5
23	a=9; F_1(-3,-7); F_2(-3,7)	a=6; F_1(4,-8); F_2(4,8)	D: y= - 8
24	b=6; F_1(0,-1); F_2(0,7)	a=10; F_1(-12,-6); F_2(12,-6)	D: y= 9
25	a=5; F_1(-4,-3); F_2(4,-3)	a=5; F_1(-9,0); F_2(3,0)	D: x= 2
26	a=4; F_1(5,0); F_2(7,0)	a=3; F_1(0,3); F_2(0,11)	D: x= 11
27	b=5; F_1(0,3); F_2(0,5)	a=5; F_1(-3,0); F_2(17,0)	D: x= - 2
28	b=7; F_1(0,-12); F_2(0,-2)	b=3; F_1(-5,-6); F_2(-5,6)	D: y= -12
29	a=7; F_1(-4,0); F_2(0,0)	b=7; F_1(-9,4); F_2(9,4)	D: y= 2,5
30	b=3; F_1(4,-2); F_2(4,2)	a=3; F_1(0,-14); F_2(0,-4)	D: x= - 4

Задача 2.13. Определить тип поверхности второго порядка, заданной уравнением. Привести уравнение поверхности к каноническому виду. Сделать чертеж. Найти сечение поверхности заданной плоскостью.

Вариант	Уравнение поверхности	Уравнение плоскости
1	$x^2-4y^2+9z^2-36=0$	$z=0$
2	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$	$x=-4$
3	$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=0$	$z=4$
4	$9x^2+4y^2-36z=0$	$y=0$
5	$25x^2-y^2-9z^2-225=0$	$y=0$
6	$9x^2+4y^2+16z^2-144=0$	$z=0$
7	$4x^2+y^2-16z=0$	$z=1$
8	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=\frac{z^2}{4}$	$y=-5$
9	$\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{9}=2y$	$z=0$
10	$x^2+9y^2-4z^2-36=0$	$x=6$
11	$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=-1$	$x=0$
12	$4x^2+36y^2-36z=0$	$z=1$
13	$x^2+9y^2-36z^2-324=0$	$x=0$
14	$16x^2+9y^2-144z^2=0$	$z=1$
15	$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{4}=-1$	$z=0$
16	$x^2-4y^2-9z^2-36=0$	$y=0$
17	$x^2-9y^2+z^2-36=0$	$y=0$
18	$25x^2+4y^2-16z^2-400=0$	$x=0$

19	$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$	$z=-4$
20	$4x^2+9y^2+z^2-100=0$	$z=8$
21	$25x^2-9y^2+z^2-225=0$	$z=0$
22	$4x^2+9y^2-4z^2-36=0$	$x=0$
23	$\frac{x^2}{25}-\frac{z^2}{16}=4y$	$z=0$
24	$25x^2-100y^2-4z^2=0$	$z=-5$
25	$x^2+4y^2-9z^2=0$	$z=\frac{1}{3}$
26	$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=-1$	$y=0$
27	$9x^2+36y^2-9z^2-324=0$	$z=0$
28	$9x^2+16y^2-144z=0$	$z=1$
29	$9x^2-y^2-81z=0$	$z=1$
30	$x^2-4y^2+25z^2-100=0$	$y=0$

Задачи по теме «Комплексные числа и многочлены»

Задача 2.14. Выполнить действия с комплексными числами. Ответ представить в алгебраической форме**.**

№ варианта	
1	$z=\frac{(64+64i\sqrt{3})^{22}}{2^{54}}$
2	$z=\frac{(64\sqrt{2}+64i\sqrt{2})^{22}}{2^{84}}$
3	$z=\frac{(-32\sqrt{2}-32i\sqrt{2})^{12}}{2^{72}}$

4	$z=\frac{(-2-2i\sqrt{3})^{12}}{2^{24}}$
5	$z=\frac{(-8\sqrt{2}+8i\sqrt{2})^{15}}{2^{60}}$
6	$z=\frac{(-32-32i\sqrt{3})^{22}}{2^{132}}$
7	$z=\frac{(4\sqrt{2}+4i\sqrt{2})^{18}}{2^{54}}$
8	$z=\frac{(256-256i\sqrt{3})^{19}}{2^{171}}$
9	$z=\frac{(256\sqrt{2}-256i\sqrt{2})^{11}}{2^{99}}$
10	$z=\frac{(-2-2i\sqrt{3})^{18}}{2^{36}}$
11	$z=\frac{(-128\sqrt{2}-128i\sqrt{2})^{18}}{2^{44}}$
12	$z=\frac{(256+256i\sqrt{3})^{12}}{2^{108}}$
13	$z=\frac{(256\sqrt{2}+256i\sqrt{2})^{10}}{2^{90}}$
14	$z=\frac{(-128+128i\sqrt{3})^{17}}{2^{136}}$
15	$z=\frac{(-8\sqrt{2}-8i\sqrt{2})^{22}}{2^{88}}$
16	$z=\frac{(-8-8i\sqrt{3})^{14}}{2^{56}}$
17	$z=\frac{(-8\sqrt{2}-8i\sqrt{2})^{10}}{2^{40}}$
18	$z=\frac{(4+4i\sqrt{3})^{16}}{2^{48}}$

19	$z=\dfrac{\left(-32\sqrt{2}-32i\sqrt{2}\right)^{18}}{2^{108}}$
20	$z=\dfrac{\left(64+64i\sqrt{3}\right)^{22}}{2^{154}}$
21	$z=\dfrac{\left(-2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}\right)^{11}}{2^{22}}$
22	$z=\dfrac{\left(4-4i\sqrt{3}\right)^{15}}{2^{45}}$
23	$z=\dfrac{\left(-32\sqrt{2}+32i\sqrt{2}\right)^{11}}{2^{66}}$
24	$z=\dfrac{\left(-8+8i\sqrt{3}\right)^{21}}{2^{84}}$
25	$z=\dfrac{\left(-2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}\right)^{17}}{2^{34}}$
26	$z=\dfrac{\left(64+64i\sqrt{3}\right)^{12}}{2^{84}}$
27	$z=\dfrac{\left(16\sqrt{2}-16i\sqrt{2}\right)^{13}}{2^{65}}$
28	$z=\dfrac{\left(4+4i\sqrt{3}\right)^{14}}{2^{42}}$
29	$z=\dfrac{\left(64\sqrt{2}-64i\sqrt{2}\right)^{13}}{2^{91}}$
30	$z=\dfrac{\left(-2+2i\sqrt{3}\right)^{21}}{2^{42}}$

Задача 2.15. Найти все корни уравнения и изобразить их на комплексной плоскости.

№ варианта	
1	а) $z^4-2z^2+4=0$ б) $z^2+(3i-2)z+5-3i=0$

2	а) $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$ б) $z^2 + (5 - 2i)z + 5 - 5i = 0$
3	а) $z^4 - 2\sqrt{3}z^2 + 4 = 0$ б) $z^2 - (1 + 3i)z - 1 + \frac{3}{2}i = 0$
4	а) $z^6 + 2z^3 + 4 = 0$ б) $z^2 + (3i - 2)z + 1 - 3i = 0$
5	а) $z^4 + 2z^2 + 2 = 0$ б) $z^2 - (2 + i)z + 1 + i = 0$
6	а) $z^6 + 2\sqrt{3}z^3 + 4 = 0$ б) $z^2 + (1 - i)z - \frac{1}{2}i + 4 = 0$
7	а) $z^4 - 4z^2 + 16 = 0$ б) $z^2 - (2 + i)z + \frac{3}{4} + i = 0$
8	а) $z^6 + 4z^3 + 16 = 0$ б) $z^2 + (2 - 3i)z + 5 - 3i = 0$
9	а) $z^4 - 4z^2 + 8 = 0$ б) $z^2 + (1 + 2i)z + \frac{3}{2} + i = 0$
10	а) $z^6 - 4\sqrt{3}z^3 + 16 = 0$ б) $z^2 - \left(-2 + \frac{1}{2}i\right)z - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}i = 0$
11	а) $z^4 + 4z^2 + 8 = 0$ б) $z^2 + (4 + i)z + (2i - \frac{1}{4}) = 0$
12	а) $z^6 - 6z^3 + 36 = 0$ б) $-\frac{1}{4}z^2 + (1 - 3i)z + 6i - 1 = 0$
13	а) $z^4 + 6z^2 + 18 = 0$ б) $z^2 + (6 - i)z - \frac{1}{4} - 3i = 0$
14	а) $z^4 + 4\sqrt{3}z^2 + 16 = 0$ б) $z^2 - (4i + 1)z + 2i - \frac{3}{2} = 0$
15	а) $z^6 + 6z^3 + 36 = 0$ б) $z^2 + (4 - i)z - (2i + \frac{1}{4}) = 0$
16	а) $z^4 - 6z^2 + 18 = 0$ б) $z^2 + (1 + 2i)z - 3 + i = 0$

17	а) $z^6 - 2z^3 + 4 = 0$ б) $\frac{1}{4}z^2 + (5i - 1)z - 23 - 10i = 0$
18	а) $z^4 - 2z^2 + 2 = 0$ б) $z^2 + (2 + 3i)z + 3i + 1 = 0$
19	а) $z^6 - 2\sqrt{3}z^3 + 4 = 0$ б) $z^2 + (1 + 2i)z - 1 + i = 0$
20	а) $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$ б) $z^2 - (5 - 4i)z - 10i = 0$
21	а) $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$ б) $2z^2 + (1 + 3i)z + 1 + \frac{3}{4}i = 0$
22	а) $z^4 + 2\sqrt{3}z^2 + 4 = 0$ б) $z^2 + (1 - 2i)z + \frac{3}{2} - i = 0$
23	а) $z^6 - 4z^3 + 16 = 0$ б) $z^2 + (2 - i)z + 3 - i = 0$
24	а) $z^6 - 4z^3 + 8 = 0$ б) $z^2 + (3 + 2i)z + 1 + 3i = 0$
25	а) $z^4 - 4\sqrt{3}z^2 + 16 = 0$ б) $z^2 - (2 - 3i)z + 1 - 3i = 0$
26	а) $z^6 + 4z^3 + 8 = 0$ б) $z^2 + (4 + 3i)z + 2 + 6i = 0$
27	а) $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ б) $z^2 + (1 - 4i)z - \frac{3}{2} - 2i = 0$
28	а) $z^6 - 6z^3 + 18 = 0$ б)$z^2 + (3 - 2i)z + 1 - 3i = 0$
29	а) $z^6 + 4\sqrt{3}z^3 + 16 = 0$ б) $\frac{5}{2}z^2 + (i - 5)z + 2 - i = 0$
30	а) $z^4 - 6z^2 + 36 = 0$ б) $z^2 + (-2 + i)z + 3 - i = 0$

<u>Задача 2.16</u>. Разложить многочлен на линейные множители.

№ варианта	многочлен
1	$p(z) = z^3 - 4z^2 + 14z - 20$
2	$p(z) = z^3 - 5z^2 + 9z - 5$
3	$p(z) = z^3 + 3z^2 + 4z + 12$
4	$p(z) = z^3 - 3z^2 + 4z + 8$
5	$p(z) = z^3 + 13z + 34$
6	$p(z) = z^3 - 7z^2 + 15z - 9$
7	$p(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2$
8	$p(z) = z^3 - 5z^2 + 12z - 8$
9	$p(z) = z^3 + z^2 + 4z + 30$
10	$p(z) = z^3 - 3z^2 + z + 5$
11	$p(z) = z^3 - 2z^2 + 5z + 26$
12	$p(z) = z^3 - 9z^2 + 28z - 30$
13	$p(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$
14	$p(z) = z^3 - z^2 + 9z - 9$
15	$p(z) = z^3 - z^2 - 7z + 15$
16	$p(z) = z^3 - 3z^2 + 9z + 13$
17	$p(z) = z^3 - 4z^2 - 2z + 20$
18	$p(z) = z^3 - 5z^2 + 11z - 15$
19	$p(z) = z^3 - 8z^2 + 22z - 20$
20	$p(z) = z^3 - 3z^2 + 12z - 10$

21	$p(z) = z^3 + z^2 - z + 15$
22	$p(z) = z^3 - 5z^2 + 7z + 13$
23	$p(z) = z^3 - 2z + 4$
24	$p(z) = z^3 - 3z^2 + z - 3$
25	$p(z) = z^3 - 6z^2 + 13z - 10$
26	$p(z) = z^3 - 3z^2 + 7z - 5$
27	$p(z) = z^3 - z^2 + z + 39$
28	$p(z) = z^3 - z^2 + 3z + 5$
29	$p(z) = z^3 + 2z^2 + 9z + 18$
30	$p(z) = z^3 - 7z^2 + 17z - 15$

Задача 2.17. Разложить многочлен на линейные множители, если известен один корень $\mathbf{z_0}$.

№ варианта	многочлен	Корень $\mathbf{z_0}$
1	$p(z) = z^4 - 8z^3 + 24z^2 - 72z + 135$	$z_0 = 3i$
2	$p(z) = z^4 - z^3 + z^2 + 9z - 10$	$z_0 = 1 - 2i$
3	$p(z) = z^4 + 2z^3 - 6z^2 + 4z - 16$	$z_0 = -\sqrt{2}i$
4	$p(z) = z^4 + 6z^3 + 10z^2 - 2z - 15$	$z_0 = -2 - i$
5	$p(z) = z^4 - 9z^3 + 39z^2 - 89z + 78$	$z_0 = 2 + 3i$
6	$p(z) = z^4 - z^3 + z^2 - 11z + 10$	$z_0 = -1 + 2i$
7	$p(z) = z^4 - 2z^3 - 4z^2 - 8z - 32$	$z_0 = -2i$
8	$p(z) = z^4 - 2z^3 - 6z^2 - 58z + 65$	$z_0 = -2 + 3i$
9	$p(z) = z^4 - 3z^3 - 5z^2 + 29z - 30$	$z_0 = 2 - i$

10	$p(z) = z^4 - 5z^3 + 11z^2 - 25z + 30$	$z_0 = -\sqrt{5}i$
11	$p(z) = z^4 + 3z^2 - 26z - 30$	$z_0 = -1 - 3i$
12	$p(z) = z^4 - z^3 + 13z^2 + 21z - 34$	$z_0 = 1 - 4i$
13	$p(z) = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 12z + 9$	$z_0 = \sqrt{3}i$
14	$p(z) = z^4 - 10z^3 + 52z^2 - 152z + 160$	$z_0 = 2 - 4i$
15	$p(z) = z^4 - 3z^3 + 26z^2 - 22z - 52$	$z_0 = 1 + 5i$
16	$p(z) = z^4 - 2z^3 - 26z^2 + 62z + 85$	$z_0 = 4 - i$
17	$p(z) = z^4 - 5z^3 + 29z^2 - 125z + 100$	$z_0 = 5i$
18	$p(z) = z^4 + 6z^3 + 28z^2 + 74z + 51$	$z_0 = -1 + 4i$
19	$p(z) = z^4 - z^3 + 10z^2 - 16z - 96$	$z_0 = 4i$
20	$p(z) = z^4 + 13z^3 + 58z^2 + 98z + 52$	$z_0 = -5 - i$
21	$p(z) = z^4 - 3z^3 - 3z^2 - 3z - 4$	$z_0 = i$
22	$p(z) = z^4 + 7z^3 + 7z^2 - 33z - 34$	$z_0 = -4 + i$
23	$p(z) = z^4 + 3z^3 + 6z^2 + 38z + 60$	$z_0 = 1 - 3i$
24	$p(z) = z^4 - 6z^3 - 19z^2 + 154z - 130$	$z_0 = 5 + i$
25	$p(z) = z^4 + 5z^3 + 11z^2 + 35z + 28$	$z_0 = \sqrt{7}i$
26	$p(z) = z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 100z + 200$	$z_0 = -2 - 4i$
27	$p(z) = z^4 - 15z^2 + 30z + 104$	$z_0 = 3 + 2i$
28	$p(z) = z^4 + 11z^3 + 40z^2 + 28z - 80$	$z_0 = -4 + 2i$
29	$p(z) = z^4 + 9z^3 + 18z^2 - 30z - 100$	$z_0 = -3 + i$
30	$p(z) = z^4 - 2z^3 + 21z^2 - 98z + 78$	$z_0 = -1 + 5i$

Приложение (примеры решения задач типового расчета).

<u>Задача 2.1</u>. Вычислить определитель матрицы: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

<u>Решение:</u> Используя свойства определителя, в какой-либо строке или в каком-либо столбце обратим в нуль все элементы, кроме одного. Выберем последний столбец. Прибавим к первой строке четвертую, умноженную на 2, и вычтем из третьей строки четвертую:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 9 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Разложим определитель по четвертому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 9 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & 9 \\ 5 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Далее добьемся максимального количества нулей во второй строке: к первому столбцу прибавим второй, умноженный на 5, к третьему столбцу прибавим второй, умноженный на 4, затем разложим определитель третьего порядка по второй строке, затем посчитаем получившийся определитель второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 9 \\ 5 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 12 & 3 & 11 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 12 & 11 \end{vmatrix} =$$
$$-(-8 \cdot 11 - 1 \cdot 12) = 88 + 12 = 100.$$

<u>Задача 2.2</u>. а) Решить матричное уравнение AX=B. Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -17 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение:</u>

При решении уравнения AX=B ; $X = A^{-1} \cdot B,$ (матрица В умножается на A^{-1} слева). Найдем матрицу, обратную к матрице A.

$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 - 3 \cdot (-4) = 10.$ $A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$

$X = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -17 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 50 & 10 & 0 \\ 30 & 20 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$

Проверка: $A \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \\ -17 & -2 & -1 \end{pmatrix} = B$ – верно.

b) Решить матричное уравнение *XA*=*B*. Сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 15 & -20 \\ 5 & 0 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}.$$

При решении уравнения *XA*=*B*, $X = B \cdot A^{-1}$ (матрица В умножается на A^{-1} справа). Найдем матрицу, обратную к матрице *A*.

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 3 \cdot (-1) = -5.$ $A^{-1} = \frac{1}{detA}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} =$ $\frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$

$$X = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 15 & -20 \\ 5 & 0 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -25 \\ -20 & 5 \\ 10 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $X \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -20 \\ 5 & 0 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} = B$ – верно.

Задача 2.3. Проверить совместность системы уравнений и, в случае совместности, решить ее двумя методами:

a) по формулам Крамера;

b) с помощью обратной матрицы (при нахождении обратной матрицы проверка обязательна).

Решение:

$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 12 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 14 \end{cases}$. Число неизвестных равно числу уравнений.

a) Найдем определитель системы с помощью правила Саррюса.

$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) \cdot (-5) + (-2) \cdot 2 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 \cdot 3 -$

$(-4) \cdot (-1) \cdot (-2) — (-5) \cdot 2 \cdot 3 — (-1) \cdot 3 \cdot 2 = -5 - 8 - 36 + 8 + 30 + 6 = -5$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow$ система совместна и имеет единственное решение

Составим определитель Δ_1, заменив в Δ первый столбец на столбец правых частей системы уравнений, и вычислим его разложением по элементам первой строки:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 12 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ 14 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 12 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 14 & -5 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot (5 - 6) - 2 \cdot (5 - 28) - 4 \cdot (-3 + 14) = -12 + 46 - 44 = -10$$

$\Delta_1 = -10$.

Составим определитель Δ_2, заменив в Δ второй столбец на столбец правых частей системы уравнений, и вычислим его разложением по элементам третьего столбца:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 12 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 14 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= (-4) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 14 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 12 \\ -2 & 14 \end{vmatrix} + (-5) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 12 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \cdot (42 - 2) - 2 \cdot (-14 + 24) - 5 \cdot (1 - 36) = -160 - 20 + 175 = -5$$

$\Delta_2 = -5$.

Составим определитель Δ_3, заменив в Δ третий столбец на столбец правых частей системы уравнений, и вычислим его разложением по элементам второй строки:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 12 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 14 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 12 \\ -2 & 14 \end{vmatrix} + (-1)$$
$$\cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= -3 \cdot (28 - 36) - 1 \cdot (-14 + 24) + 1 \cdot (-3 + 4) = 24 - 10 + 1$$
$$= 15$$

$\Delta_3 = 15$.

<u>Замечание.</u> Определители можно вычислять любым удобным способом: по правилу Саррюса, разложением по любой строке или столбцу, а также использовать свойства определителя.

Вычислим значения неизвестных $x_{1,} x_{2,} x_3$ по формулам Крамера:

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$.

$x_1 = \frac{-10}{-5} = 2$; $x_2 = \frac{-5}{-5} = 1$; $x_3 = \frac{15}{-5} = -3$.

Проверка: подставим полученные неизвестные в исходную систему:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2 + 2 + 12 = 12 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 - 1 - 6 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -4 + 3 + 15 = 14 \end{cases} \text{ – верно.}$$

Ответ: $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = -3$.

b) Запишем исходную систему в матричной форме: $AX=B$, где

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix}$; $detA = -5 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$существует.

Вычислим матрицу, обратную к матрице A: $A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ – алгебраическое дополнение к элементу матрицы a_{ij}, i – номер строки, j – номер столбца, M_{ij} – минор.

Запишем алгебраические дополнения для матрицы A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -10 + 12 = -2$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = 15 - 4 = 11$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3$

$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 11 & -3 & -10 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ -\frac{11}{5} & \frac{3}{5} & 2 \\ -\frac{7}{5} & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица.

$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 11 & -3 & -10 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – верно.

$X = A^{-1} \cdot B; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 11 & -3 & -10 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$

Проверка: AX=B $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix}$ – верно.

Ответ совпадает с решением, найденным по формулам Крамера.

<u>Задача 2.4.</u> Решить неоднородную систему линейных уравнений методом Гаусса. Выделить общее решение однородной системы и частное решение неоднородной системы. Сделать проверку.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 - 6x_4 = 1 \end{cases}$$

<u>Решение:</u>

m - число уравнений (m=3); n - число неизвестных (n=4);

Запишем систему в матричном виде: $AX = B$; где

A=$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 14 \\ 6 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$; X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$;

Метод Гаусса – метод последовательного исключения неизвестных. Выпишем расширенную матрицу системы $(A|B)$и приведём ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 6 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & -2 & -6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -24 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -7 \end{array}\right):3 \sim$$

[на 1м шаге из 2 строки вычтем 1-ю, умноженную на 2; к 3-й строке прибавим 1-ю; на 2-м шаге 2 строку поделим на 3]

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

[на третьем шаге к 3-й строке прибавим 2-ю]. В результате выполненных преобразований матрица приведена к ступенчатому виду, 3-я строка обнулилась.

Ранг расширенной матрицы Rg $(A|B) = 2$ - числу ненулевых строк.

Rg $(A|B) < n$ (числа неизвестных) $\Rightarrow$. система имеет бесконечно много решений.

Выберем базисный минор- минор 2-го порядка (т.к. ранг Rg $(A|B) = 2)$, не равный нулю. Пусть это будет минор , состоящий из элементов приведенной к ступенчатому виду матрицы, стоящих в 1 и 2 строке и 1 и 3 столбце.

$М_б = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$; Таким образом, базисные строки – 1-я и 2-я, базисные столбцы- 1-й и 3-й. Базисным столбцам соответствуют базисные переменные: x_1 и x_3 ; Тогда x_2 и x_4- свободные переменные. $\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Присвоим свободным переменным значения констант:

$x_2 = С_1$; $x_4 = С_2$.

Перепишем систему: $\begin{cases} 3x_1 - С_1 + 3x_3 + 14С_2 = -8 \\ \qquad\qquad -x_3 \ - 8С_2 \ = \ 7 \end{cases}$;

Далее базисные переменные выражаем через свободные, начиная с последнего уравнения:

Из второго уравнения: $x_3 = -8С_2 - 7$;

Из первого: x_1 $=(-8 + С_1 - 3x_3 - 14С_2)/3$;

Подставляя во второе уравнение $x_3 = -7 - 8С_2$, получим:

$x_1 = (-8 + С_1 - 3(-8С_2 - 7) \quad - 14С_2)/3$;

$x_1 = \frac{1}{3}С_1 + \frac{10}{3}С_2 + \frac{13}{3}$;

Запишем общее однородное решение системы:

$$X_{он} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}С_1 + \frac{10}{3}С_2 + \frac{13}{3} \\ С_1 \\ -8С_2 - 7 \\ С_2 \end{pmatrix} = С_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + С_2 \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Где $X_{оо} = С_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + С_2 \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$ - общее решение соответствующей однородной системы $АХ = 0$, состоящее из двух линейно-независимых базисных решений,

и $X_ч = \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$ - частное решение исходной неоднородной системы $\text{AX} = B$; т.е.
$X_{он}$= $X_{оо}$+$X_ч$.

Проверка:

Выполним проверку в матричном виде:

Базисные решения из Ф.С.Р. должны удовлетворять однородной системе AX=0.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 14 \\ 6 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 14 \\ 6 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Частное решение должно удовлетворять исходной неоднородной системе $\text{AX} = B$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 14 \\ 6 & -2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Найденное решение верно!

Примечание: Можно было в качестве базисных столбцов выбрать 2-й и 3-й, тогда базисными переменными были бы x_2 и x_3.

<u>Задача 2.5.</u>

Даны векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$: $\overline{a}$ = $\overline{i}$-2$\overline{j}$+4$\overline{k}$; $\overline{b}$ = 3$\overline{i}$-6$\overline{j}$+12$\overline{k}$; $\overline{c}$ = $-2\overline{i}$+$\overline{j}$+$\overline{k}$.

1) Среди векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ выделить пары коллинеарных векторов, ортогональных векторов.

Решение: два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны. ($\overline{a}\parallel\overline{b}$ <=> $\frac{x_a}{x_b}=\frac{y_a}{y_b}=\frac{z_a}{z_b}$, где $\overline{a}$=(x_a, y_a, z_a), $\overline{b}$=(x_b, y_b, z_b))

Координаты векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ в ортонормированном базисе $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$:

$\overline{a}=(1,-2,4)$, $\overline{b}=(3,-6,12)$, $\overline{c}=(-2,1,1)$. Как мы видим, соответствующие координаты векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ пропорциональны : $\frac{1}{3}=\frac{-2}{-6}=\frac{4}{12}$ => $\overline{a}\parallel\overline{b}$; координаты векторов $\overline{a}$, $\overline{c}$ непропорциональны: $\frac{1}{-2}\neq\frac{-2}{1}\neq\frac{4}{1}$ => $\overline{a}$ не коллинеарен $\overline{c}$ ($\overline{a}\nparallel\overline{c}$) и, следовательно, $\overline{b}$ не коллинеарен $\overline{c}$ ($\overline{b}\nparallel\overline{c}$) , т.к. $\overline{a}\parallel\overline{b}$.

Проверим векторы $\overline{a}$, $\overline{c}$ и $\overline{b}$, $\overline{c}$ на ортогональность. Известно, что вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, т.е. тогда и только тогда, когда сумма произведений их соответствующих координат равна нулю.

$x_a x_c+y_a y_c+z_a z_c$=1·(-2)+(-2)·1+4·1=0 => $\overline{a}$ ортогонален $\overline{c}$ ($\overline{a}\perp\overline{c}$)

Ортогональность $\overline{b}$ и $\overline{c}$ сразу следует из того, $\overline{a}\perp\overline{c}$ и $\overline{a}\parallel\overline{b}$.

2) Проверить будут ли компланарны три вектора:

a) $\overline{a}=\overline{i}-2\overline{j}+4\overline{k}$; $\overline{b}=3\overline{i}-6\overline{j}+12\overline{k}$; $\overline{c}=-2\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$;

b) $\overline{l}=2\overline{i}+\overline{j}+3\overline{k}$; $\overline{m}=2\overline{i}-\overline{j}+3\overline{k}$; $\overline{n}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$

Критерий компланарности трех векторов: три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Если тройка векторов содержит пару коллинеарных векторов, то они компланарны.

а) Вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ компланарны, т.к. $\overline{a}\parallel\overline{b}$ (см. п.1).

Критерий компланарности также выполняется.

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=\begin{vmatrix}1 & -2 & 4\\ 3 & -6 & 12\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$, т.к. две строки определителя пропорциональны.

b) Найдем смешанное произведение векторов $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$.

$$(\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2+3+6+3-2-6=2$$

$(\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}) \neq 0 \quad => \quad$ вектора $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ - не компланарны.

__Задача 2. 6__. Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис в пространстве V_3. Найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

$\vec{a} = (1,2,1)$; $\vec{b} = (0,-1,1)$; $\vec{c} = (2,0,1)$; $\vec{d} = (5,8,2)$.

<u>Решение:</u> $\dim V_3=3$, следовательно, любые три линейно независимые вектора в V_3 образуют базис. Проверим на линейную независимость векторы $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$. Составим определитель из координат векторов, записав их по столбцам.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1+0+4+2-0-0=5 \neq 0 \;=> \vec{a}; \vec{b}; \vec{c}$- линейно независимые, => они образуют базис $=>$ вектор $\vec{d}$ можно разложить по этому базису, т.е. существуют числа x,y,z, такие что:

$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Запишем в координатах:

$x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$, получаем систему: $\begin{cases} x \quad\; + 2z = 5 \\ 2x - y \quad\; = 8 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$;

Данную систему можно решить любым способом. Решим ее по формулам Крамера. $\Delta = 5$; (уже найден);

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5+0+16+4-0-0=15$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8+0+8-16-10-0= -10$;

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2+0+10+5-0-8 = 5$;

$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3$; $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{5} = -2$; $z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1$; т.е.

$\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

Проверка: $3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\8\\2\end{pmatrix}$, верно!

Задача 2.7 Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*. Найти:

1) внутренний угол при вершине *A* треугольника *ABC*;
2) площадь треугольника *ABC*;
3) объём пирамиды *ABCD*;
4) длину высоты, опущенную из вершины *D*, пирамиды *ABCD*.

Решение:

$A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$.

1). Внутренний угол *A* треугольника *ABC*: $\angle BAC$ – это угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Найдём косинус угла $\angle BAC$ с помощью скалярного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Вычислим координаты этих векторов: $\overrightarrow{AB} = (2;-2;-3)$; $\overrightarrow{AC} = (4;0;6)$.

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Найдём скалярное произведение и длины векторов:

$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = 2 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 + (-3) \cdot 6 = -10$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 4 + 9} = \sqrt{17}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{-10}{\sqrt{17} \cdot 2\sqrt{13}} = \frac{-5}{\sqrt{221}} = \frac{-5 \cdot \sqrt{221}}{221} \Longrightarrow$$

$$\angle BAC = \arccos\left(-\frac{5 \cdot \sqrt{221}}{221}\right).$$

2). Площадь треугольника *ABC* вычислим с помощью векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

Сначала надо вычислить векторное произведение векторов (вспомним, что это вектор), а затем найдём модуль этого вектора.

$$[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-12-0) - \vec{j}(12-(-12)) + \vec{k}(0-(-8)) == -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k}$$

$$= (-12;-24;8).$$

$$\left|[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}]\right| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = 28.$$

Итак, площадь треугольника равна $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14.$

3). Объём пирамиды $ABCD$ вычислим с помощью смешанного произведения трёх векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$: $V_{\text{пир } ABCD} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$

$\overrightarrow{AD} = (-7;-7;7)$.

Смешанное произведение равно определителю, составленному из координат векторов, записанных по строкам:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\text{прибавим к первой строке третью, умноженную на } (-2)\right) =$$

$$= 14 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\text{раскроем определитель по второму столбцу})$$

$$=(-1)^5 \cdot (-1) \cdot 14 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 14 \cdot 22 = 308.$$

Заметим, что смешанное произведение оказалось положительным числом, значит тройка векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ - правая.

Итак

$$V_{\text{пир } ABCD} = \frac{1}{6} \cdot 308 = \frac{154}{3}.$$

4). Длина высоты из вершины D пирамиды $ABCD$.

$$V_{\text{пир}ABCD} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot h_D$$

Вычислим по формуле:

$$h_D = \frac{3V_{\text{пир}ABCD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|}{\left|[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}]\right|}$$

Воспользуемся результатами пунктов 2) и 3). Тогда $h_D = \frac{14 \cdot 22}{28} = 11.$

Задача 2.8 Пользуясь свойствами скалярного и векторного произведений, вычислить угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и площадь параллелограмма, построенного на этих векторах. Угол между векторами $\bar{p}$ и $\bar{q}$ равен α.

Вариант	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\lvert\bar{p}\rvert$	$\lvert\bar{q}\rvert$	α
	$\bar{p}-2\bar{q}$	$\bar{p}+\bar{q}$	3	2	2π/3

Решение:

В условии задачи не указаны координаты векторов, значит, будем пользоваться определением и свойствами скалярного и векторного произведений, а не их координатными формами.

а) Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ найдем с помощью скалярного произведения $\cos(\bar{a},\bar{b}) = \frac{(\bar{a},\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$, используя свойства скалярного произведения:

1. $(\bar{p},\bar{q}) = (\bar{q},\bar{p})$;
2. $(\bar{p},\bar{p}) = |\bar{p}|^2$;

$$(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{p}-2\bar{q})\cdot(\bar{p}+\bar{q}) = (\bar{p},\bar{p}) + (\bar{p},\bar{q}) - 2(\bar{q},\bar{p}) - 2(\bar{q},\bar{q}) =$$

$$= |\bar{p}|^2 - |\bar{p}|\cdot|\bar{q}|\cdot cos(\bar{p},\bar{q}) - 2|\bar{q}|^2 = 3^2 - 3\cdot 2\cdot\cos\frac{2\pi}{3} - 2\cdot 2^2$$

$$= 9 + 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2} - 8 = 4$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a},\bar{a})} = \sqrt{(\bar{p}-2\bar{q})\cdot(\bar{p}-2\bar{q})} = \sqrt{\bar{p}^2 - 2\bar{p}\cdot 2\bar{q} + 4\bar{q}^2} =$$

$$= \sqrt{3^2 - 4\cdot 3\cdot 2\cdot\cos\frac{2\pi}{3} + 4\cdot 2^2} = \sqrt{9 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2} + 16} = \sqrt{37}$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{(\bar{b},\bar{b})} = \sqrt{(\bar{p}+\bar{q})\cdot(\bar{p}+\bar{q})} = \sqrt{\bar{p}^2 + 2\bar{p}\cdot\bar{q} + \bar{q}^2} =$$

$$= \sqrt{3^2 + 2\cdot 3\cdot 2\cdot\cos\frac{2\pi}{3} + 2^2} = \sqrt{9 - 2\cdot 3\cdot 2\cdot\frac{1}{2} + 4} = \sqrt{7}$$

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{4}{\sqrt{37}\cdot\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{259}}{259} \Rightarrow (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \arccos\frac{4\sqrt{259}}{259} \approx 76°.$$

б) Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна модулю векторного произведения этих векторов

$S = \left|[\bar{a},\bar{b}]\right|$. Найдём векторное произведение $\bar{a}$ и $\bar{b}$, используя свойства векторного произведения:

1. $[\bar{p},\bar{p}] = 0$; 2. $[\bar{p},\bar{q}] = -[\bar{q},\bar{p}]$;

$\left[\bar{a},\bar{b}\right] = [(\bar{p}-2\bar{q}),(\bar{p}+\bar{q})] = [\bar{p},\bar{p}] + [\bar{p},\bar{q}] - 2[\bar{q},\bar{p}] - 2[\bar{q},\bar{q}] = [\bar{p},\bar{q}] + 2[\bar{p},\bar{q}] = 3[\bar{p},\bar{q}] \Rightarrow \left[\bar{a},\bar{b}\right] = 3[\bar{p},\bar{q}]$;

$|[\bar{p},\bar{q}]| = |\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right) = 3\cdot 2\cdot\sin\frac{2\pi}{3} = 3\sqrt{3}.$

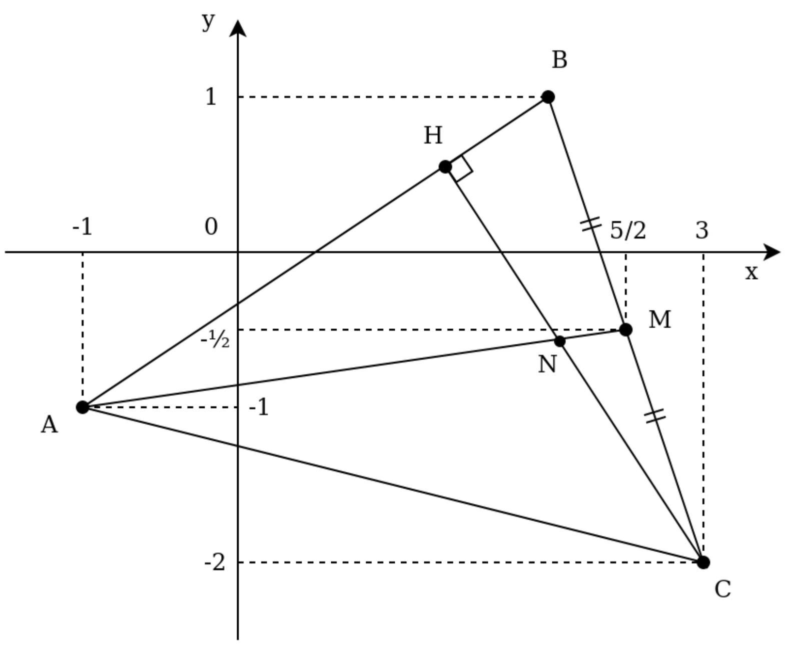
Итак, площадь параллелограмма

$S = \left|\left[\bar{a},\bar{b}\right]\right| = 3|[\bar{p},\bar{q}]| = 3\cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}.$

Задача 2.9 Даны вершины треугольника $A(-1;-1)$, $B(2;1), C(3;-2)$ на плоскости. Найти:

1) каноническое уравнение прямой *AB*;
2) уравнение высоты *CH* (общее и с угловым коэффициентом);
3) параметрические уравнения медианы *AM*;
4) координаты точки *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH*;
5) длину высоты *CH*;
6) координаты точки *K* пересечения медиан треугольника *ABC*.

Решение:



1) Каноническое уравнение прямой AB, проходящей через две данные точки находим по формуле: $\boldsymbol{\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}}$;

$$\frac{x-(-1)}{2-(-1)} = \frac{y-(-1)}{1-(-1)} \Leftrightarrow \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{2}.$$

2) Для общего уравнения высоты *CH* к стороне *AB* необходимы координаты нормали к *CH* – это вектор $\overline{AB}$:

$\overline{n} = \overline{AB} = (B - A) = (3; 2)$. Точка $\text{T}(x, y) \in CH \Leftrightarrow \overline{C\text{T}} \perp \overline{AB} \Leftrightarrow \left(\overline{C\text{T}}, \overline{AB}\right) = 0$

Так как $\overline{\text{CT}} = (x - 3; y + 2)$, то общее уравнение высоты *CH* найдем по формуле

$\boldsymbol{n_x(x - x_0) + n_y\,(y - y_0) = 0;}$ $3(x - 3) + 2(y + 2) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - 5 = 0.$

Чтобы получить уравнение с угловым коэффициентом, выразим *y* через *x*:

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}, \qquad \text{угловой коэффициент } k = -\frac{3}{2}.$$

3) Найдём координаты точки *M* - середины стороны *BC* :

$$M = \left(\frac{B + C}{2}\right) = \left(\frac{2 + 3}{2}; \frac{1 - 2}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

Направляющий вектор медианы *AM* :

$$\overline{AM} = (M - A) = \left(\frac{5}{2} - (-1); -\frac{1}{2} - (-1)\right) = \left(\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Для удобства возьмём в качестве направляющего вектора медианы $\overline{l} = 2\overline{AM} = (7; 1)$. Начальная точка $A(-1; -1)$.

Параметрические уравнения медианы *AM* $\boldsymbol{\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}; t} \in (-\infty; +\infty)$

$$(AM): \begin{cases} x = 7t - 1 \\ y = t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

4) Координаты точки *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH*.

Воспользуемся параметрическими уравнениями медианы *AM,* подставим $x = 7t - 1$ и $y = t - 1$ в общее уравнение высоты *CH* и найдём значение параметра t для точки пересечения *N* :

$$3(7t - 1) + 2(t - 1) - 5 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{23}$$

Подставим найденное значение t в параметрические уравнения *AM*

$$N: \begin{cases} x = 7 \cdot \dfrac{10}{23} - 1 \\ y = \dfrac{10}{23} - 1 \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{47}{23}; -\frac{13}{23}\right)$$

5) Для нахождения длины высоты CH необязательно находить основание высоты *H.* Очевидно, что длина высоты равна расстоянию от точки *C* до сторо-

ны *AB*. Воспользуемся формулой расстояния от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой L, заданной своим общим уравнением $L: Ax + By + C = 0$

$$\rho(M_0, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

В пункте 1) мы получили каноническое уравнение прямой *AB*. Получим общее уравнение этой прямой:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{2} \Leftrightarrow 2x - 3y - 1 = 0$$

Тогда

$$|CH| = \rho(C, AB) = \frac{|2 \cdot 3 - 3(-2) - 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{11}{\sqrt{13}} = \frac{11\sqrt{13}}{13}.$$

6) Точка *K* пересечения медиан треугольника *ABC*.

1 способ: Известно, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины.

Тогда $\overline{AK} = 2\overline{KM}$. Пусть $K(x, y) \Rightarrow \overline{AK} = (x + 1; y + 1)$,

$$\overline{KM} = (\frac{5}{2} - x; -\frac{1}{2} - y)$$

$$(x + 1; y + 1) = 2\left(\frac{5}{2} - x; -\frac{1}{2} - y\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 5 - 2x \\ y + 1 = -1 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow K(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3})$$

2 способ: Известно, что координаты точки пересечения медиан треугольника являются средним арифметическим соответствующих координат вершин треугольника. $K\,(\frac{-1+2+3}{3}; \frac{-1+1-2}{3}) = K(\frac{4}{3}; -\frac{2}{3})$

<u>Задача 2.10</u>

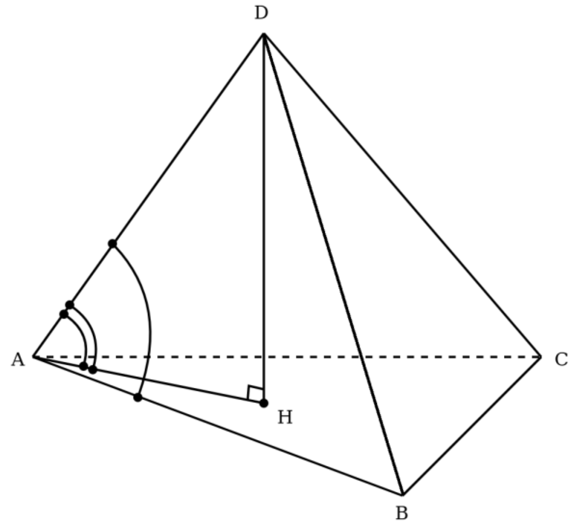
Для точек *A(2,3,1), B(4,1,-2), C(6,3,7), D(-5,-4,8)* составить уравнения:

1) плоскости *ABC;*
2) канонические уравнения высоты, опущенной из вершины *D* пирамиды *ABCD*;
3) плоскости, проходящей через точку *D* перпендикулярно прямой *AB*.

Для точек *A, B, C, D* вычислить

4) синус угла между прямой *AD* и плоскостью *ABC*;
5) косинус угла между плоскостью *ABC* и координатной плоскостью *XOY*;
6) косинус угла между прямыми *AB* и *AD*.

Решение:



1) Уравнение плоскости *ABC* через три точки.

Найдём координаты векторов, компланарных этой плоскости (в данном случае – лежащих на плоскости):

$\overline{AB} = (B - A) = (2, -2, -3)$; $\overline{AC} = (C - A) = (4,0,6)$

Произвольная точка $M \in (ABC) \Leftrightarrow$ векторы $\overline{AM}, \overline{AB}, \overline{AC}$ компланарны $\Leftrightarrow$ смешанное произведение этих векторов равно нулю, $(\overline{AM}, \overline{AB}, \overline{AC}) = 0$

Напомним: координатная форма смешанного произведения трёх векторов в ортонормированном базисе – определитель из координат векторов в этом базисе.

Найдём координаты произвольного вектора этой плоскости

$\overline{AM} = (x - 2, y - 3, z - 1)$

Тогда $(\overline{AM}, \overline{AB}, \overline{AC}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\text{раскроем определитель по первой строке}$$

$$\Leftrightarrow -12(x-2) - 24(y-3) + 8(z-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x + 6y - 2z - 22 = 0$$

Это общее уравнение плоскости *ABC* .

Нормаль плоскости $\bar{n} \perp (ABC)$: $\bar{n} = (3,6,-2)$.

2) Канонические уравнения высоты из вершины *D*.

Направляющим вектором высоты к грани *ABC* является нормаль к этой плоскости $\bar{n}$, начальная точка *D*. Тогда канонические уравнения высоты DH:

$$\frac{x+5}{3} = \frac{y+4}{6} = \frac{z-8}{-2}$$

3) Обозначим P – плоскость, проходящая через точку D, перпендикулярно прямой AB. Тогда нормалью к плоскости P является вектор $\overline{AB} = \overline{n} = (2, -2, -3)$. Общее уравнение плоскости P находим по формуле

$n_x \cdot (x - x_{0)} + n_y \cdot (y - y_{0)} + n_z \cdot (z - z_{0)} = 0,$ получаем

$2(x + 5) - 2(y + 4) - 3(z - 8) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y - 3z + 26 = 0.$

4) $\sin\left(\widehat{AD, ABC}\right) = \left|\cos\left(\widehat{\overline{AD}, \overline{n}}\right)\right| = \left|\frac{(\overline{AD}, \overline{n})}{|\overline{AD}||\overline{n}|}\right|$, где $\overline{n}$ - нормаль плоскости ABC .

$$(\overline{AD}, \overline{n}) = (-7, \quad -7, \quad 7)\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = -21 - 42 - 14 = -77$$

$|\overline{AB}| = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2 + 7^2} = 7\sqrt{3}; \quad |\overline{n}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{49}$=7.

$$\sin\left(\widehat{AD, ABC}\right) = \left|\frac{-77}{49\sqrt{3}}\right| = \frac{77\sqrt{3}}{147}$$

Мы взяли модуль, так как угол между прямой и плоскостью по определению острый, следовательно синус такого угла не может быть отрицательным.

5) $\cos\left(\widehat{ABC, XOY}\right) = \left|\cos\left(\widehat{\overline{n}, \overline{k}}\right)\right|$, где $\overline{n}$ - нормаль плоскости ABC,

$\overline{k} = (0,0,1)$- базисный вектор, нормаль плоскости XOY.

$$\left(\overline{n}, \overline{k}\right) = (3 \quad 6 \quad -2)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2; \qquad |\overline{n}| = 7, \qquad \left|\overline{k}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \cos\left(\widehat{ABC, XOY}\right) = \frac{\left|\left(\overline{n}, \overline{k}\right)\right|}{|\overline{n}|\left|\overline{k}\right|} = \frac{|-2|}{7} = \frac{2}{7}.$$

6) $\cos\left(\widehat{AB, AD}\right) = \left|\cos\left(\widehat{\overline{AB}, \overline{AD}}\right)\right| = \frac{|(\overline{AB}, \overline{AD})|}{|\overline{AB}||\overline{AD}|} =$

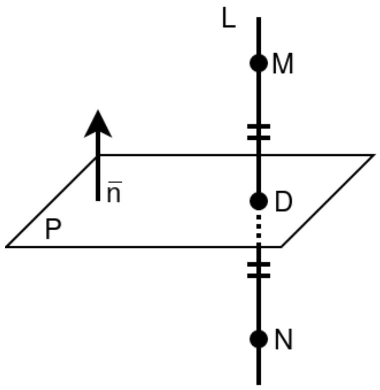
$$= \frac{\left|(2 \quad -2 \quad -3)\begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-3)^2}\sqrt{(-7)^2 + (-7)^2 + 7^2}} = \frac{|-14 + 14 - 21|}{\sqrt{17} \cdot 7\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{17}}.$$

Задача 2.11*. Найти

- для четных вариантов: проекцию точки M(1,2,-3) на плоскость

P: $3x - y - 2z + 7 = 0$, расстояние от точки M до плоскости P, точку N, симметричную точке M относительно плоскости P.

Решение:



1) Точка D - проекция точки M на плоскость P, является точкой пересечения прямой L, проходящей через точку M перпендикулярно плоскости P, и плоскости P. Найдем уравнение прямой L. Так как прямая L перпендикулярна заданной плоскости, то в качестве направляющего вектора можно взять вектор нормали r плоскости $\vec{s}=\vec{n}=(3,-1,-2)$. Запишем параметрическое уравнение прямой L:

$$\begin{cases} x=1+3t, \\ y=2-t, \\ z=-3-2t, \end{cases}$$

Подставим эти выражения в уравнение плоскости и найдем соответствующее значение параметра t:

$$3(1+3t)-(2-t)-2(-3-2t)+7=0$$

$$=> t=-1$$

Подставив его в параметрическое уравнение прямой L, получим координаты точки D:

$$x_D=1-3, y_D=2-(-1), z_D=-3-2(-1), \text{ т. е. } D\ (-2,3,-1).$$

2) Найдем расстояние от точки M до плоскости P. Расстояние от точки $M(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости P, заданной общим уравнением, найдем по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Используя данную формулу, получим

$$d=\frac{|3\cdot 1+(-1)\cdot 2-2\cdot(-3)+7|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$$

3) Найдем точку N ,симметричную точке M относительно плоскости.

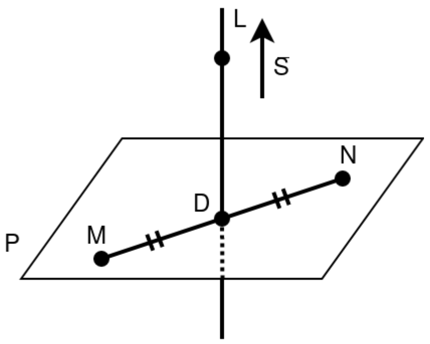
Точка D является серединой отрезка MN. Следовательно,

$x_D=\frac{x_M+x_N}{2};\ y_D=\frac{y_M+y_N}{2};\ z_D=\frac{z_M+z_N}{2}$, получаем $-2=\frac{1+x_N}{2};3=\frac{2+y_N}{2};-1=\frac{-3+z_N}{2}$ отсюда $x_N=-5, y_N=4, z_N=1$, т.е. $N(-5,4,1)$.

Задача 2.11*. Найти

- для нечетных вариантов: проекцию точки M(1,2,1) на прямую L : $\frac{x+3}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{3}$, расстояние от точки M до прямой L; точку N, симметричную точке M относительно прямой L.

Решение:



1) Проекцией точки M на прямую L является точка D, полученная пересечением прямой L с плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно прямой. Составим уравнение плоскости P, проходящей через точку M перпендикулярно прямой L. Вектор нормали $\vec{n}$ к плоскости совпадает с направляющим вектором $\vec{s}$ прямой L:

$\vec{n}=\vec{s}=(1,2,3)$. Запишем уравнение плоскости P:

$$1(x-1)+2(y-2)+3(z-1)=0 \text{ или } x+2y+3z-8=0$$

Запишем параметрическое уравнение прямой L: $\begin{cases} x = t - 3, \\ y = 2t, \quad t \in R. \\ z = 3t - 1, \end{cases}$

Подставим эти выражения в уравнение плоскости и найдем значение параметра t: $t - 3 + 2(2t) + 3(3t - 1) - 8 = 0 \; => t = 1$

Точка D имеет координаты D(-2,2,2).

2) Найдем расстояние от точки M до прямой L. Расстояние равно длине отрезка между точкой и ее проекцией на прямую.

$$|MD| = \sqrt{(x_D - x_M)^2 + (y_D - y_M)^2 + (z_D - z_M)^2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (2-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+0+1} = \sqrt{10}.$$

4) Найдем точку N, симметричную точке M относительно прямой L.

Точка D является серединой отрезка MN, следовательно

$$x_D = \frac{x_M + x_N}{2}, y_D = \frac{y_M + y_N}{2}, z_D = \frac{z_M + z_N}{2} \Rightarrow .$$
$$x_N = 2(-2) - 1 = -5, y_N = 2 \cdot 2 - 2 = 2, z_N = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

Следовательно, N(-5,2,3) искомая точка.

Задача 2.12.

Теория

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение. Алгебраической кривой второго порядка называется кривая , уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0, \tag{1}$$

где не все коэффициенты A, B, C одновременно равны нулю.

Рассмотрим три типа невырожденных кривых. Для невырожденной кривой второго порядка найдется такая декартова прямоугольная система координат, называемая канонической, в которой уравнение кривой имеет один из следующих трех видов:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0; \qquad ((2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0; \qquad ((3)$$

$$y^2 = 2px, p > 0. \qquad ((4)$$

Эллипс

Определение . Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0 \qquad (5)$$

В случае a=b уравнение принимает вид $x^2 + y^2 = a^2$, которое описывает окружность радиуса a с центром в начале координат.

Параметры a и b называются полуосями эллипса (большой и малой соответственно). Точки $A_1(-a; 0), A_2(a, 0), B_1(0; -b), B_2(0, b)$— вершины эллипса. Прямые $A_1A_2,\ B_1B_2$ — главные оси, O— точка пересечения осей — центр эллипса. Точки $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ называются фокусами эллипса. Для любой точки M, лежащей на кривой числа $r_1 = |F_1M|$ и
$r_2 = |F_2M\ |$— фокальные радиусы.

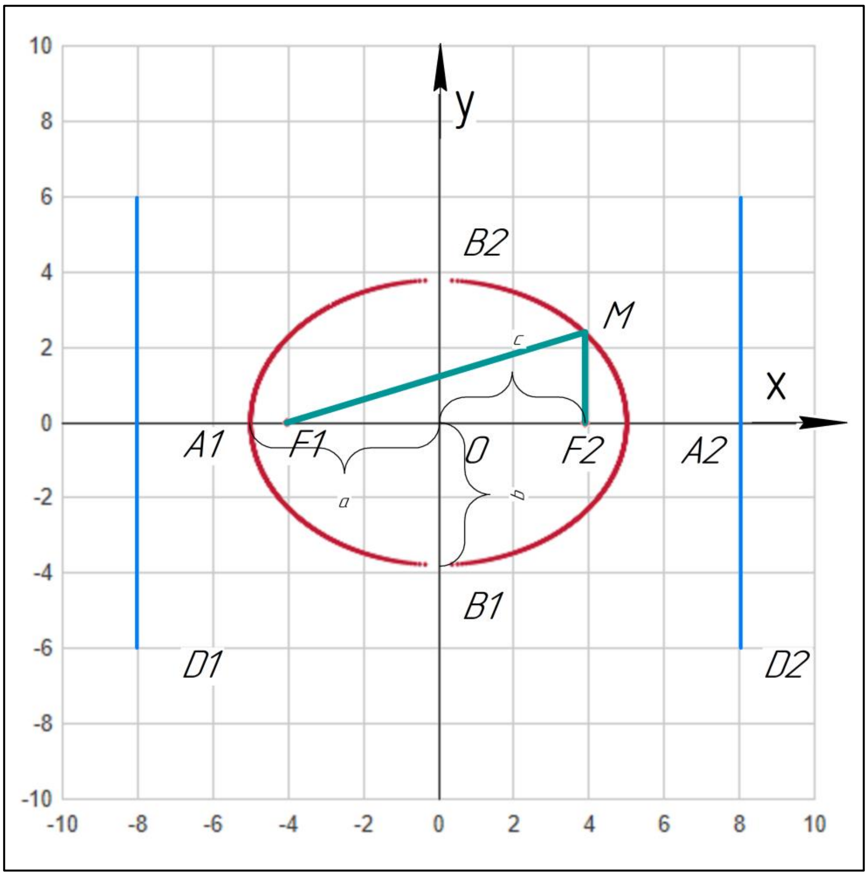


Рис.1

Число $e = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса и является мерой его «сплюснутости».

Прямые $D_1: x = -\frac{a}{e}$ и $D_2: x = \frac{a}{e}$ называются директрисами.

Расстояние от точки M эллипса до директрисы D_1 обозначим $\rho(M; D_1)$, а до D_2 — $\rho(M; D_2)$, а расстояние от точки M до фокусов F_1 и F_2 – r_1(M) и r_2(M) соответственно.

Для параметров эллипса справедливы соотношения (6) и (7):

$$r_1(M) + r_2(M) = 2a; \quad 6(6)$$

$$\frac{r_1(M)}{\rho(M; D_1)} = \frac{r_2(M)}{\rho(M; D_2)} = e. \quad 7(7)$$

Если центр эллипса смещен в точку O' с координатами $(x_0; y_0)$, а его главные оси параллельны координатным осям, то уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad ((8)$$

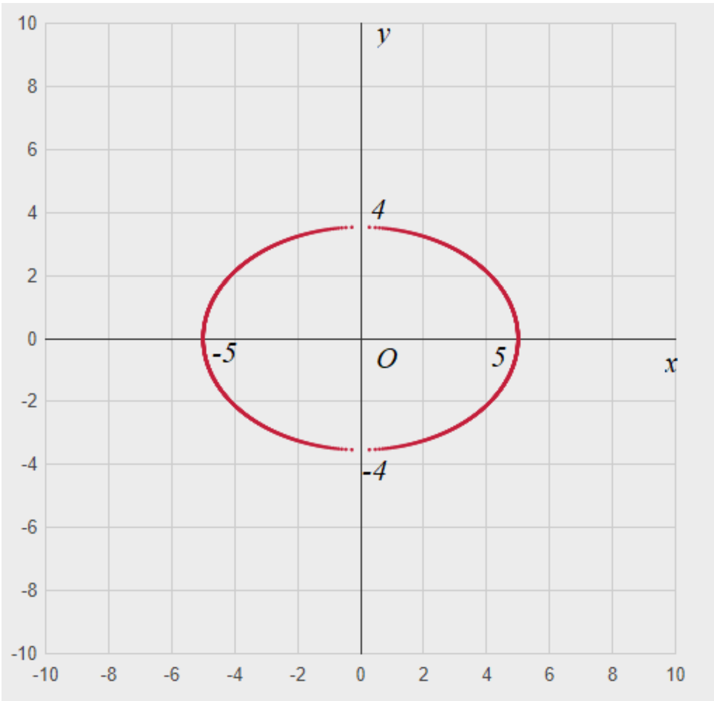
Задача№1.

Составить каноническое уравнение эллипса и сделать чертеж, найти координаты фокусов, если известно, что его центр находится в начале координат, большая полуось равна 5, малая полуось равна 4.

Решение.

Уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$



Найдем фокальное расстояние:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=3, \text{тогда } F_1(-3;0); F_2(3;0).$$

Задача №2.

Составить каноническое уравнение эллипса и сделать чертеж, если F_1 (2;-3); F_2(2;5), а меньшая полуось b=3.

Решение: $|F_1F_2|=8$, в то же время $|F_1F_2|=2c$ — удвоенное фокальное расстояние. Следовательно, c = 4.

$$a^2=b^2+c^2=9+16=25 => a=5.$$

Середина отрезка F_1F_2 точка $O'(2;1)$ — центр эллипса.

С учетом того, что фокусы эллипса лежат на б**о**льших полуосях, напишем уравнение:

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$$

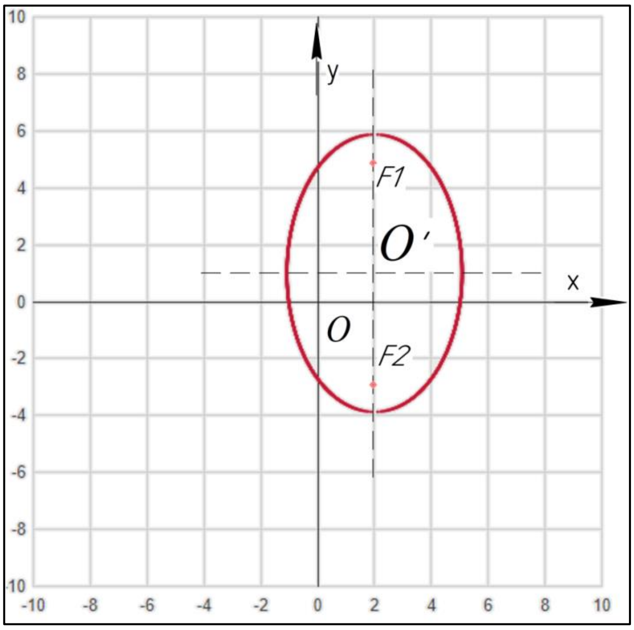


Рис.2

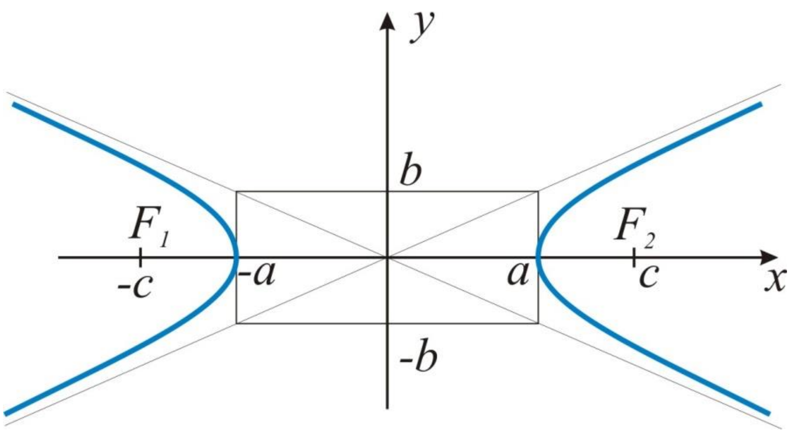
Гипербола

Определение . Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Каноническое уравнение гиперболы :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a>0, b>0 \tag{(9)}$$

Параметры a и b— полуоси гиперболы; точки $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ — её вершины.



Середина отрезка A_1A_2 точка O называется центром гиперболы, она является центром симметрии кривой. Ось симметрии, проходящая через точки A_1и A_2 — действительная ось. Перпендикулярно действительной оси через точку O проходит мнимая ось гиперболы. Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы. Точки $F_1(-c;0), F_2(c;0)$, где $c = \sqrt{a^2+b^2}$, называются фокусами. Для любой точки гиперболы M числа $r_1(M) = |F_1M|$и $r_2(M) = |F_2M|$ — фокальные радиусы. Число $e = \frac{c}{a}$ — эксцентриситет. Прямые $D_1\colon x = -\frac{a}{e}$ и$D_2\colon x = \frac{a}{e}$— директрисы, а расстояние от точки M гиперболы до директрисы D_1 обозначим $\rho(M;D_1)$, а до D_2 — $\rho(M;D_2)$.

Для параметров гиперболы справедливы соотношения (10) и (11):

$$|r_1(M) - r_2(M)| = 2a \qquad ((10)$$

$$\frac{r_1(M)}{\rho_1(M;D_1)} = \frac{r_2(M)}{\rho_2(M;D_2)} = e \qquad ((11)$$

При параллельном переносе на вектор $\bar{d} = \{x_0, y_0\}$ центр кривой смещается в точку $O'(x_0;y_0)$, а уравнение гиперболы принимает вид :

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad ((12)$$

Гипербола, удовлетворяющая уравнению (13) называется сопряженной к гиперболе, задаваемой уравнением (9).

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad ((13)$$

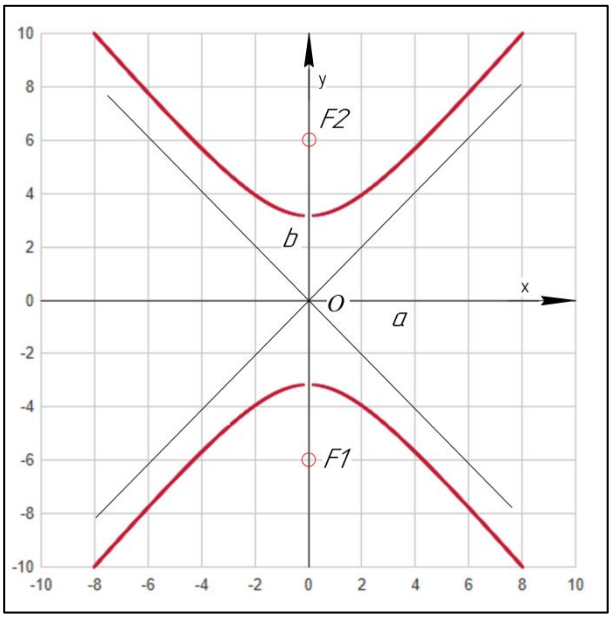


Рис.3 (чертеж сопряженной гиперболы)

Асимптоты сопряженной гиперболы имеют уравнения $y = \pm\frac{b}{a}x$;

фокусы имеют координаты: $F_1(0; -c), F_2(0; c)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Задача №3.

Составить каноническое уравнение гиперболы, если заданы её фокусы F_1(-1;-3) и F_2(7;-3), а мнимая полуось b=3. Сделать чертёж.

Решение $|F_1F_2| = 8 \Rightarrow c = \frac{1}{2}|F_1F_2|, c = 4.$

Из равенства $c^2 = a^2 + b^2$ следует, что $a^2 = 4^2 - 3^2 = 7$. Середина отрезка F_1F_2 точка O'(3;-3) — центр гиперболы. Тогда уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{(x-3)^2}{7} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

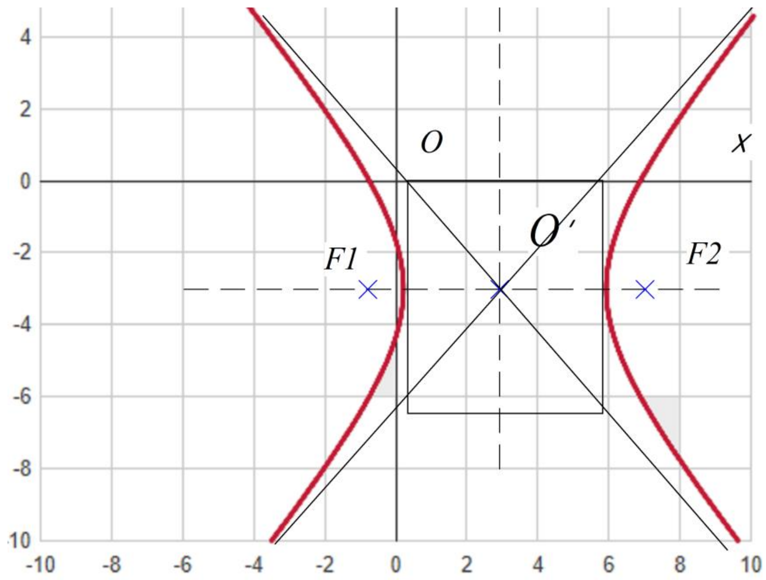


Рис.4

Парабола

Определение. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, расстояние от которых до фиксированной точки, называемой фокусом, равно расстоянию до фиксированной прямой, называемой директрисой.

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px, p > 0 \quad ((14)$$

Число p– расстояние от фокуса до директрисы, называется параметром параболы, O (0;0) — её вершина, точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ — фокус; $r(M) = |F;M|$— фокальный радиус точки M параболы; прямая $D: x = -\frac{p}{2}$ — директриса.

$$\frac{r(M)}{\rho(M;D)} = 1, \quad ((15)$$

где $\rho(M,D)$— расстояние от точки M до директрисы.

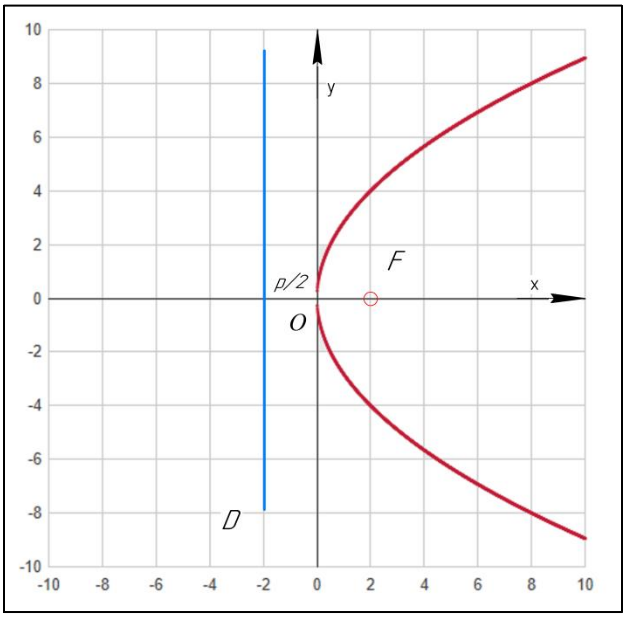


Рис.5

Задача №4. Составить уравнение параболы, если ее центр O'(-1;2), а директриса D: x=1.

Решение

Расстояние от точки O' до директрисы равно $\frac{p}{2} = 2$, следовательно параметер p= 4. Тогда координаты фокуса F (-3;2), а ветви параболы направлены влево. С учетом смещения центра в точку $O'(x_0;y_0)$ уравнение примет вид:

$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$

Тогда $(y-2)^2 = -8(x+1)$— искомое уравнение.

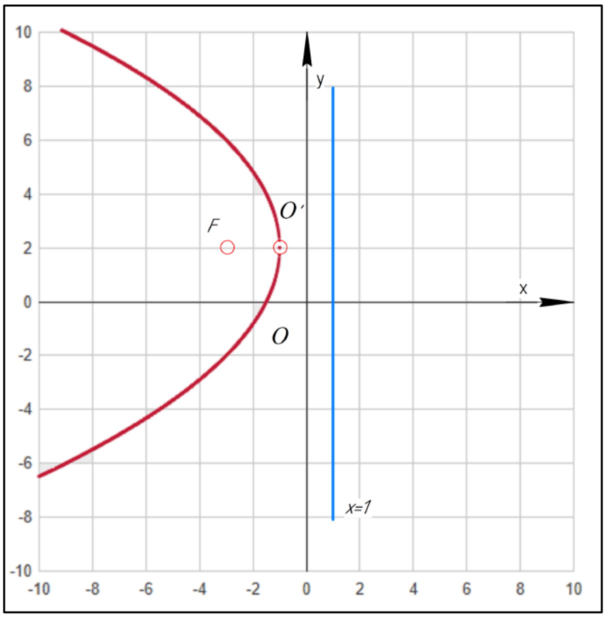


Рис.6

Замечание.

Если парабола задана уравнением $x^2 = 2py$, то ветви параболы направлены вверх, а если уравнением $x^2 = -2py$, то, соответственно, вниз.

Задача 2.13

Теория:

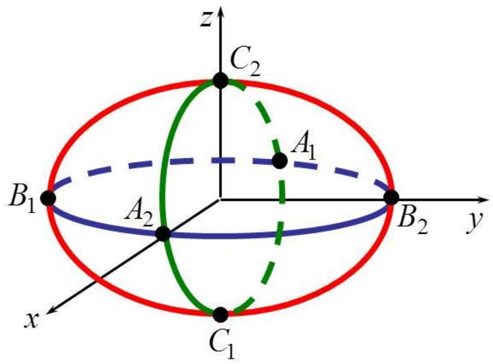
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение. Алгебраической поверхностью второго порядка называется поверхность S, уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+Gx+Hy+Iz+K=0$, (*)

где не все коэффициенты при членах второго порядка одновременно равны нулю.

Если поверхность невырожденная, то существует преобразование декар-



товой прямоугольной системы координат такое, что уравнение (*) может быть приведено к одному из указанных ниже видов, называемых каноническими и определяющих следующие типы поверхностей:

1) **Эллипсоид**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

В частном случае, если a=b=c=r, уравнение примет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

Это уравнение задает сферу радиуса R с центром в начале координат.

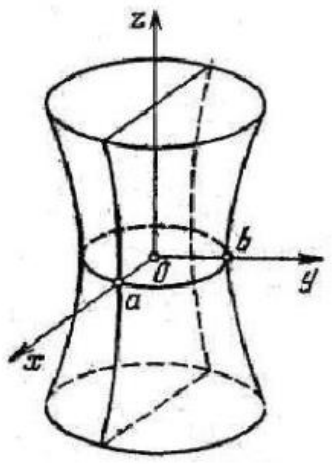
При сечении эллипсоида одной из координатных плоскостей (z=0 или x=0 или y=0) получается эллипс. Например, при z=0

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

2) Гиперболоид

А) Однополостный

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



При пересечении однополостного гиперболоида плоскостью z=0 получается эллипс, заданный уравнением

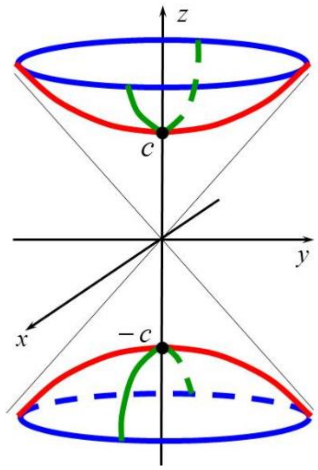
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

А при пересечении однополостного гиперболоида одной из плоскостей x=0 или y=0 – гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ и } \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ соответственно.}$$

Б) Двуполостный

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



Двуполостный гиперболоид не имеет пересечений с плоскостью XOY, т.к. при z=0 уравнение

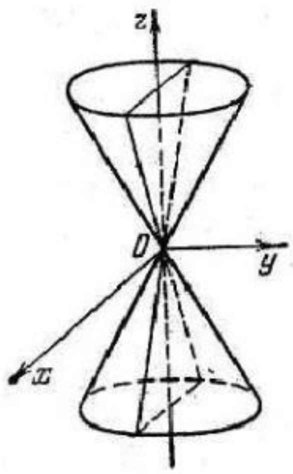
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

не имеет решение на множестве действительных чисел.

При пересечении двуполостного гиперболоида одной из плоскостей x=0 или y=0 получаются гиперболы. Заметим, что они являются сопряженными гиперболами к тем, которые получены в пункте А).

<u>3) Конус второго порядка</u>:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



Для получения пересечения конуса с плоскостью XOY подставим в уравнение конуса z=0:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

Решением этого уравнения является точка O(0;0;0).

При пересечении конуса с плоскостями z=±c получаем эллипсы.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$

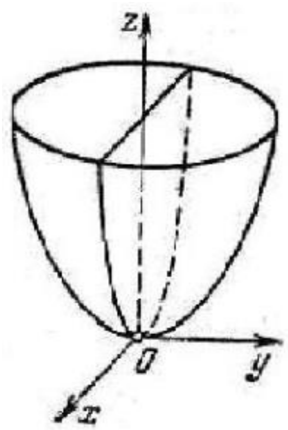
Пересечением конуса с координатной плоскостью YOZ является пара прямых:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 => \left[\begin{array}{l} z=\frac{c}{b}y \\ z=-\frac{c}{b}y \end{array}\right.$$

Аналогично, получается пара пересекающихся прямых при y=0 в плоскости XOZ.

4) Параболоид

А) Эллиптический: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z,$



Сечение эллиптического параболоида плоскостью y=0 приводит к уравнению параболы

$$\frac{x^2}{a^2}=z$$

Это парабола в плоскости XOZ, ветви которой направлены вверх.

В плоскости YOZ аналогично:

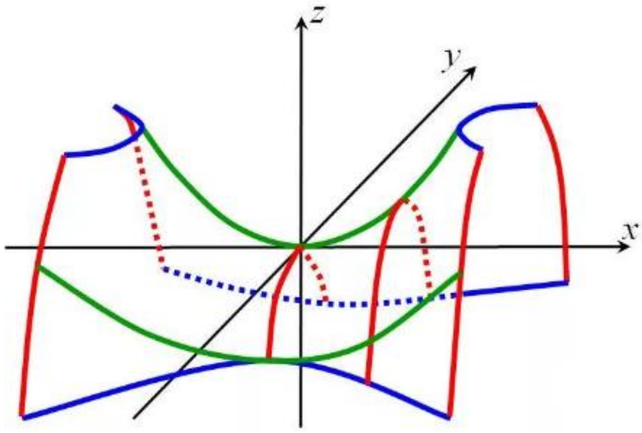
$$\frac{y^2}{b^2} = z$$

Б) Гиперболический: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$

В случае гиперболического параболоида пересечение поверхностей с координатными плоскостями являются параболы:

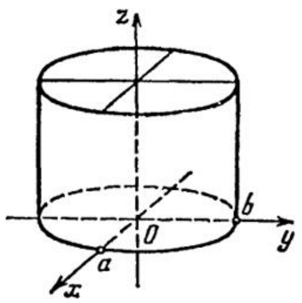
$\frac{x^2}{a^2} = z$ в плоскости XOZ $(y = 0)$ и $-\frac{y^2}{b^2} = z$ в плоскости YOZ $(x = 0)$.

Кроме того, пересечением поверхности с горизонтальной плоскостью z = const является гипербола.

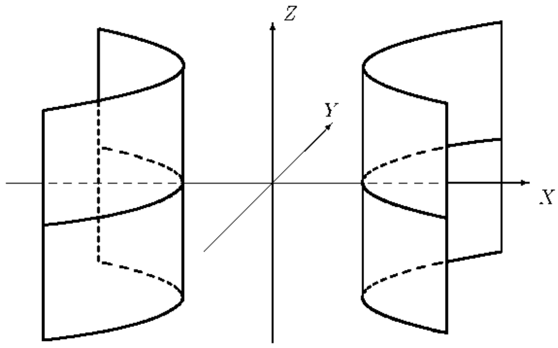


5) Цилиндр второго порядка

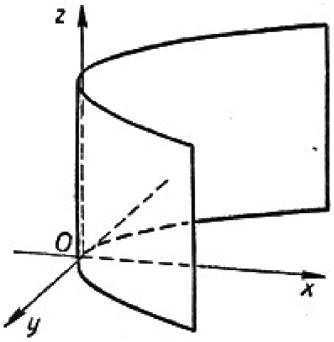
А) Эллиптический: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Б) Гиперболический: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



В) Параболический: $y^2 = 2px$ $(p > 0)$



Рассматриваются еще, так называемые, вырожденные поверхности:

мнимый эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$,

мнимый конус: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$,

мнимый эллиптический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

пара мнимых пересекающихся плоскостей: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$,

пара пересекающихся плоскостей: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$,

пара параллельных плоскостей: $x^2 - a^2 = 0$,

пара мнимых параллельных плоскостей: $x^2 + a^2 = 0$, пара совпавших плоскостей: $x^2 = 0$,

<u>Задача:</u>

Определить тип поверхности второго порядка, заданной уравнением:

$$25x^2 - 50x - 100y^2 - 4z^2 - 75 = 0$$

Привести уравнение поверхности к каноническому виду. Сделать чертеж. Найти сечения поверхности плоскостями:

а) $y = 0$;
б)$x = 7$.

Решение:

Приведем уравнение поверхности к каноническому виду. Для этого выделим полный квадрат:

$$25x^2 - 50x - 100y^2 - 4z^2 - 75 = 0,$$

$$25(x^2 - 2x + 1) - 100y^2 - 4z^2 - 100 = 0,$$

$$25(x-1)^2 - 100y^2 - 4z^2 = 100.$$

Разделив обе части уравнения на свободный член, получим уравнение двуполостного гиперболоида:

$$\frac{(x-1)^2}{4} - y^2 - \frac{z^2}{25} = 1 \qquad (1)$$

Найдем координаты вершин. Заметим, что $y^2 + \frac{z^2}{25} = \frac{(x-1)^2}{4} - 1$, следовательно, при $y = z = 0$, $\frac{(x-1)^2}{4} - 1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{matrix} x=3 \\ x=-1 \end{matrix}\right.$, то есть вершины гиперболы имеют координаты: (3;0;0) и (–1;0;0).

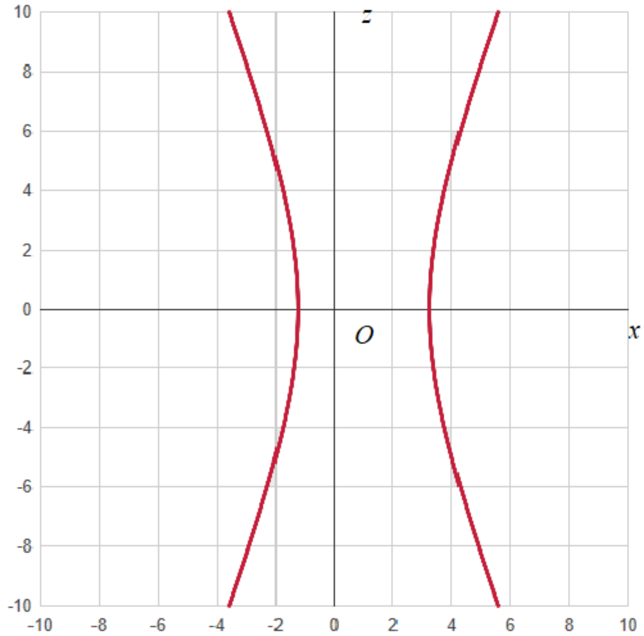
Для того чтобы построить чертеж поверхности, сначала надо построить сечения.

а) *y=0*, тогда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{z^2}{25} = 1.$$

Значит, плоскость $y=0$ пересекает гиперболоид, и линией пересечения является гипербола в плоскости XOZ с центром в точке $x_0=1$ и $z_0=0$ и полуосями $a=2$ и $b=5$; асимптоты гиперболы: $z = \pm\frac{5}{2}(x-1)$.

Сделаем чертеж гиперболы:



б) пересечение поверхности с плоскостью x=7 определяется уравнением:

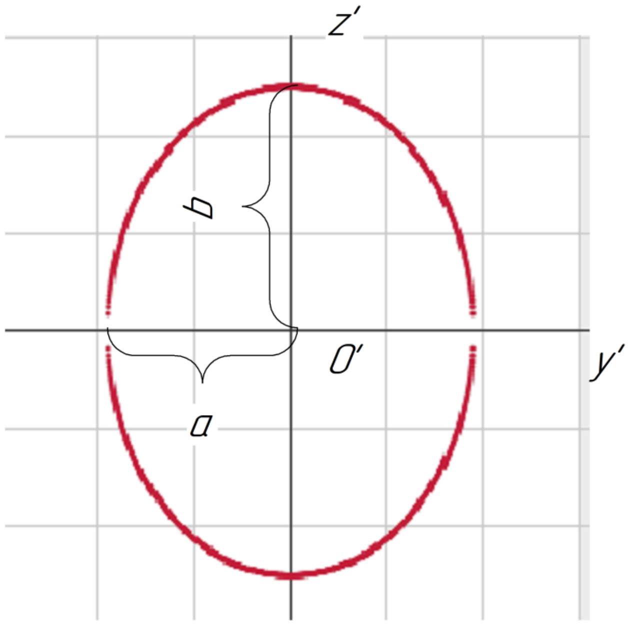
$$y^2 + \frac{z^2}{25} = 8,$$

что равносильно уравнению эллипса

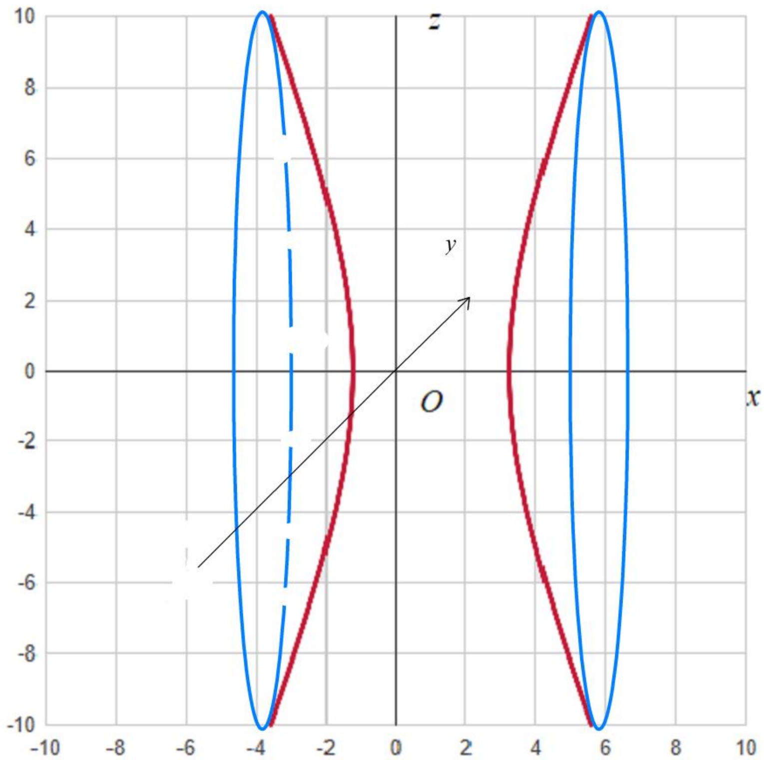
$$\frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{200} = 1$$

с полуосями $a = 2\sqrt{2}$ и $b = 10\sqrt{2}$и центром в точке *(7;0;0)* на плоскости, параллельной YOZ .

Проведем в плоскости x=7 оси $O'Y'$и $O''Z'$ параллельно осям OY и OZ и построим эллипс:



Теперь сделаем чертеж поверхности



Заключение

Материал курса «Алгебра и геометрия» (1-й семестр) очень важен для полноценного обучения студентов инженерных специальностей и используется в дальнейшем в таких математических дисциплинах, как математический анализ (2, 3, 4 семестры), теория дифференциальных уравнений, математическая физика, теория случайных процессов. На базе этого курса решаются задачи специальных дисциплин (например, задачи электротехники, радиотехники, физики, экономики) и многие прикладные задачи.

В пособии использованы задачи, изложенные в изданиях из списка литературы.

Список литературы

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г., Аналитическая геометрия, М: Физматлит, 2017.224 с.

2. Канатников А.Н. Крищенко А.П. Аналитическая геометрия. М.: Издательство МГТУ им. Баумана, 2016**.** 392 с. (электронное издание)

3. Ильин В. А., Ким Г. Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М.: Проспект, 2015. 320 с.

Дополнительная литература

1. .Краснов М.Л., Кисилев А.И., и др., Вся высшая математика., т. 1, М: URSS, 2014 г. 366 с.

2. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч.1./Под ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2003. 288 с.

3. Атабеков Г.И. Основы теории цепей., Спб.: издательство «Лань», 2009. 432 с.

4. Аксененкова И.М., Игонина Т.Р., Малыгина О.А., Чекалкин Н.С. и др. Математический анализ, 1 семестр. Учебно-методическое пособие. М.: МИР-ЭА, 2012. 128с.

5. Сборник задач по высшей математике для экономистов/под ред. П.С. Геворкяна/. М.: ЗАО «Издательство Экономика», 2010. 384 с.

6. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. М.: Издательство «Наука», 1964. 664 с.

7. Абрамова Е.В., Барашев В.П., Кузнецова Е.Ю., Сивкова Е.О., Таланова Л.И., Унучек С.А. Алгебра и геометрия, 1 семестр. Контрольные задания для очного обучения факультетов Электроники, ИТ, РТС. М.: МИРЭА, 2011. 32 с.

8. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. том1. Минск.: Высшая школа, 2013. 304 с.

Учебное издание

Под редакцией кандидата физико-математических наук
Н.С. Чекалкина

Методическое пособие

Печатается в авторской редакции

Российский технологический университет (МИРЭА)

119454, Москва, пр. Вернадского, д.78