Семинар 8. Векторное и смешанное произведение векторов.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ: Перед рассмотрением примеров и решением задач необходимо ознакомиться с материалами Лекции 7 и 8. Выписать основные определения и свойства.

Задача 1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*.
$A(1;1;2)$, $B(2;3;-1)$, $C(2;-2;4)$.

Найти площадь треугольника *ABC*;

Решение: Площадь треугольника *ABC* вычислим с помощью векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|.$$

Сначала надо вычислить векторное произведение векторов (вспомним, что это вектор), а затем найдём модуль этого вектора.

$$\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\imath}(4-9) - \vec{\jmath}(2+3)) + \vec{k}(-3-2) == -5\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} - 5\vec{k}$$

$$= (-5;-5;-5).$$

$$\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right| = \sqrt{(-5)^2+(-5)^2+(-5)^2} = 5\sqrt{3}$$

Итак, площадь треугольника равна $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{3}$

Заметим, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ равна $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right] = 5\sqrt{3}$.

Задача 2. Пользуясь свойствами векторного произведения, найти площадь параллелограмма, построенного на этих векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Угол между векторами $\bar{p}$ и $\bar{q}$ равен $\alpha = 3\pi/4$; $|\boldsymbol{\bar{p}}| = \boldsymbol{4}$; $|\boldsymbol{\bar{q}}| = \boldsymbol{3}$.

$\boldsymbol{\bar{a}} = \boldsymbol{3}\bar{p} + 2\bar{q}$; $\boldsymbol{\bar{b}} = \boldsymbol{2}\bar{p} - \bar{q}$

Решение:

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна модулю векторного произведения этих векторов

$S = \left|\left[\bar{a}, \bar{b}\right]\right|$. Найдём векторное произведение $\bar{a}$ и $\bar{b}$, используя свойства векторного произведения:

1. $[\bar{p}, \bar{p}] = 0$; 2. $[\bar{p}, \bar{q}] = -[\bar{q}, \bar{p}]$;

$$[\bar{a},\bar{b}] = [(3\bar{p}+2\bar{q}),(2\bar{p}-\bar{q})] = 6[\bar{p},\bar{p}] - 3[\bar{p},\bar{q}] + 4[\bar{q},\bar{p}] - 2[\bar{q},\bar{q}] = -3[\bar{p},\bar{q}] - 4[\bar{p},\bar{q}] = -7[\bar{p},\bar{q}]$$

$$|[\bar{p},\bar{q}]| = |\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\sin(\widehat{\vec{p},\vec{q}}) = 4\cdot 3\cdot\sin\frac{3\pi}{4} = 6\sqrt{2}.$$

Итак, площадь параллелограмма

$$S = |[\bar{a},\bar{b}]| = 7|[\bar{p},\bar{q}]| = 7\cdot 6\sqrt{2} = 42\sqrt{2}.$$

<u>Задача 3</u>. Компланарны ли векторы $\vec{a} = (7,4,6)$; $\vec{b} = (2,1,1)$; $\vec{c} = (19,11,17)$?

Решение. Найдем смешанное произведение векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 19 & 11 & 17 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$ векторы компланарны.

Задача 4. Даны координаты вершин тетраэдра ABCD

$A(1;1;2)$, $B(2;3;-1)$, $C(2;-2;4)$, $D(-1;1;3)$.

Найдите объем тетраэдра и длину высоты, опущенной из вершины D.

Решение:

Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ вычисляется с помощью смешанного произведения трех векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$;

$$V_{\text{пар}} = |\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}|$$

Объём пирамиды $ABCD$ $\quad V_{\text{пир}\,ABCD} = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}|$

Смешанное произведение равно определителю, составленному из координат векторов, записанных по строкам:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$ Заметим, что смешанное произведение оказалось положительным числом, значит тройка векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ - правая.

Если бы значение было отрицательным, это означало бы , что тройка левая. При вычисление объема, мы бы взяли его по модулю.

Итак,

$$V_{\text{пир}\,ABCD} = \frac{1}{6}\cdot|5| = \frac{5}{6}.$$

Найдем длину высоты из вершины D пирамиды $ABCD$.

$$V_{\text{пир}ABCD} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot h_D$$

Вычислим по формуле:

$$h_D = \frac{3V_{\text{пир}ABCD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right]\right|}$$

Воспользуемся результатом задачи 1: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3}$

Тогда $h_D = \frac{3 \cdot \frac{5}{6}}{\frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения.

1) Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы векторы $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\overrightarrow{d} = \vec{a} - \vec{b}$ были коллинеарны?
Ответ: $\vec{a} // \vec{b}$

2) Даны векторы $\vec{a} = 3i - j - 2k$ и $\vec{b} = i = i + 2j - k$.
Найти векторное произведение векторов $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$ и $\overrightarrow{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$

Ответ: $\vec{x}$ (25,5,35)

3) При каком значении параметра λ компланарны векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$; $\vec{c} = 3\vec{i} + \lambda\vec{j} - 4\overrightarrow{k}$?
Ответ: $\lambda = 1$.

4) Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (1,0,2)$; $\vec{b} = (2,3,5)$; $\vec{c} = (0,-2,-4)$.
Ответ: 10.