АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Определение. Алгебраической поверхностью второго порядка называется поверхность S, уравнение которой в декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$\mathbf{Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+Gx+Hy+Iz+K=0} \quad \mathbf{(*)}$$

где не все коэффициенты при членах второго порядка одновременно равны нулю.

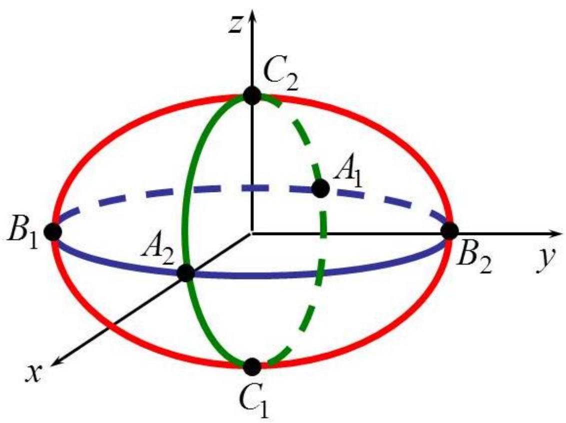
Если поверхность невырожденная, то существует преобразование декартовой прямоугольной системы координат такое, что уравнение (*) может быть приведено к одному из указанных ниже видов, называемых каноническими и определяющих следующие типы поверхностей:

1) **Эллипсоид**

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1}$$

При сечении эллипсоида одной из координатных плоскостей (z=0 или x=0 или y=0) получается эллипс. Например, при z=0

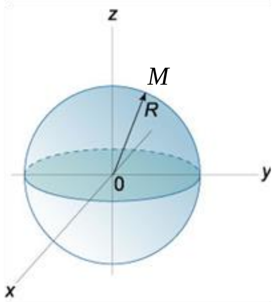
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



В частном случае, если a=b=c=r, уравнение примет вид

$$\boldsymbol{x^2+y^2+z^2=r^2}$$

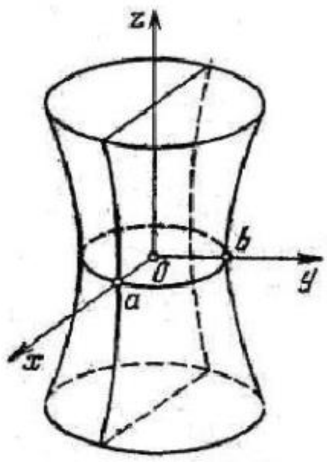
Это уравнение задает **сферу радиуса R** с центром в начале координат.



2) Гиперболоид

А) Однополостный

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$



При пересечении однополостного гиперболоида плоскостью z=0 получается эллипс, заданный уравнением

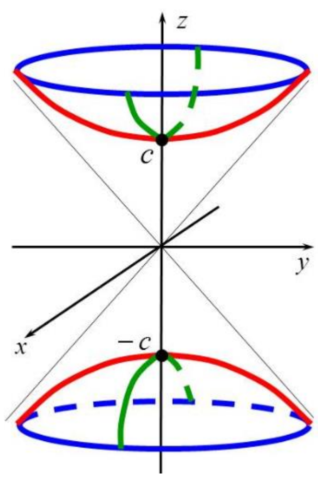
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

А при пересечении однополостного гиперболоида одной из плоскостей x=0 или y=0 – гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ и } \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ соответственно.}$$

Б) Двуполостный

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1}$$



Двуполостный гиперболоид не имеет пересечений с плоскостью XOY, т.к. при z=0 уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

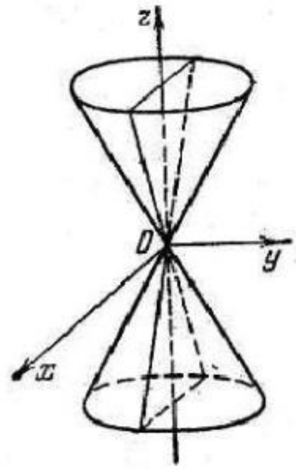
не имеет решение на множестве действительных чисел.
При пересечении плоскость z=$\pm c$ получаем две точки-вершины гиперболоида.
При пересечении плоскостью z=h, где $|h|$>c получим эллипсы

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}$-1

При пересечении двуполостного гиперболоида одной из плоскостей x=0 или y=0 получаются гиперболы. Заметим, что они являются сопряженными гиперболами к тем, которые получены в пункте А).

3) Конус второго порядка:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0}$$



Для получения пересечения конуса с плоскостью XOY подставим в уравнение конуса z=0:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$$

Решением этого уравнения является точка O(0;0;0).

При пересечении конуса с плоскостями z=$\pm$c получаем эллипсы.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$=1;

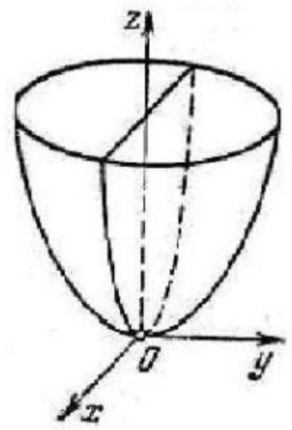
Пересечением конуса с координатной плоскостью YOZ является пара прямых:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 => \left[\begin{array}{l} z=\frac{c}{b}y \\ z=-\frac{c}{b}y \end{array}\right.$$

Аналогично, получается пара пересекающихся прямых при y=0 в плоскости XOZ.

4) <u>Параболоид</u>

$\boldsymbol{A}$)Эллиптический: $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z}$



Сечение эллиптического параболоида плоскостью y=0 приводит к уравнению параболы

$$\frac{x^2}{a^2}=z$$

Это парабола в плоскости XOZ, ветви которой направлены вверх.

В плоскости YOZ аналогично:

$$\frac{y^2}{b^2}=z$$

Сечение плоскостью z=0 дает точку O(0;0;0),

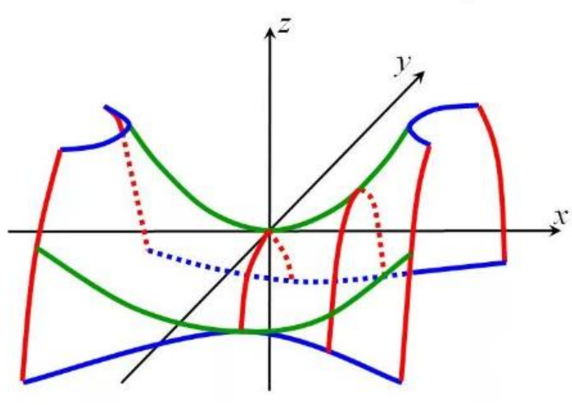
а плоскостью z=h, где h>0 дает эллипс $\frac{x^2}{ha^2}+\frac{y^2}{hb^2}=1,$

Б) Гиперболический: $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z}$.

В случае гиперболического параболоида пересечение поверхностей с координатными плоскостями являются параболы:

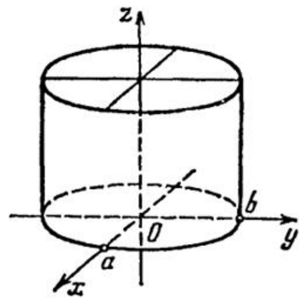
$\frac{x^2}{a^2}=z$ в плоскости XOZ $(y=0)$ и $-\frac{y^2}{b^2}=z$ в плоскости YOZ $(x=0)$.

Кроме того, пересечением поверхности с горизонтальной плоскостью z=const является гипербола.

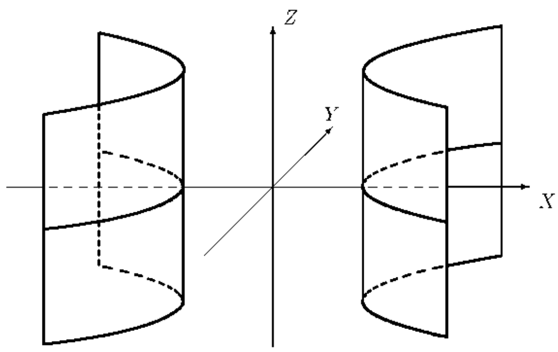


5) Цилиндр второго порядка

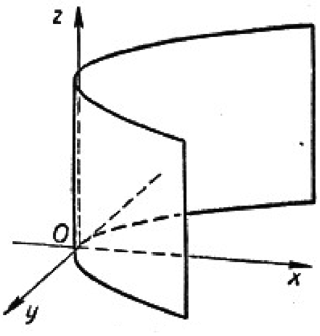
А) Эллиптический: $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$



Б) Гиперболический: $\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$



В) Параболический:
$\boldsymbol{y^2=2px\ (p>0)}$



Рассматриваются еще, так называемые, вырожденные поверхности:

мнимый эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1,$

мнимый конус: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$,
мнимый эллиптический цилиндр: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$,
пара мнимых пересекающихся плоскостей: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$,
пара пересекающихся плоскостей: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$,
пара параллельных плоскостей: $x^2-a^2=0$,
пара мнимых параллельных плоскостей: $x^2+a^2=0$,
пара совпавших плоскостей: $x^2=0$,

Задача 1:

Определить тип поверхности второго порядка, заданной уравнением:

$$25x^2-50x-100y^2-4z^2-75=0$$

Привести уравнение поверхности к каноническому виду. Сделать чертеж. Найти сечения поверхности плоскостями:

а) $y=0$;
б)$x=7$.

Решение:

Приведем уравнение поверхности к каноническому виду. Для этого выделим полный квадрат:

$25x^2-50x-100y^2-4z^2-75=0$,
$25(x^2-2x+1)-100y^2-4z^2-100=0$,
$25(x-1)^2-100y^2-4z^2=100$.

Разделив обе части уравнения на свободный член, получим уравнение двуполостного гиперболоида:

$$\frac{(x-1)^2}{4}-y^2-\frac{z^2}{25}=1 \qquad (1)$$

Найдем координаты вершин.

Заметим, что $y^2+\frac{z^2}{25}=\frac{(x-1)^2}{4}-1$, следовательно,

при $y=z=0$, $\qquad \frac{(x-1)^2}{4}-1=0 \Rightarrow \left[\begin{smallmatrix} x=3 \\ x=-1 \end{smallmatrix}\right.$,

то есть вершины гиперболы имеют координаты: (3;0;0) и (–1;0;0).

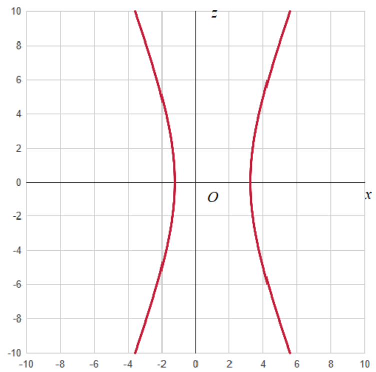
Для того чтобы построить чертеж поверхности, сначала надо построить сечения.

а) $y=0$, тогда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{z^2}{25}=1.$$

Значит, плоскость $y=0$ пересекает гиперболоид, и линией пересечения является гипербола в плоскости XOZ с центром в точке $x_0=1$ и $z_0=0$ и полуосями $a=2$ и $b=5$; асимптоты гиперболы: $z = \pm\frac{5}{2}(x-1)$.

Сделаем чертеж гиперболы:



б) пересечение поверхности с плоскостью x=7 определяется уравнением:

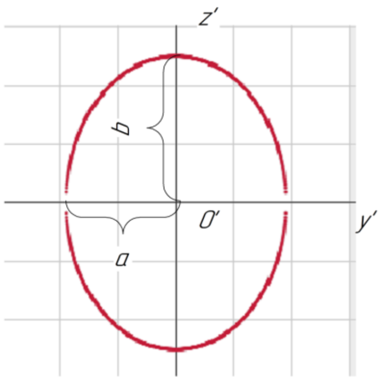
$$y^2 + \frac{z^2}{25} = 8,$$

что равносильно уравнению эллипса

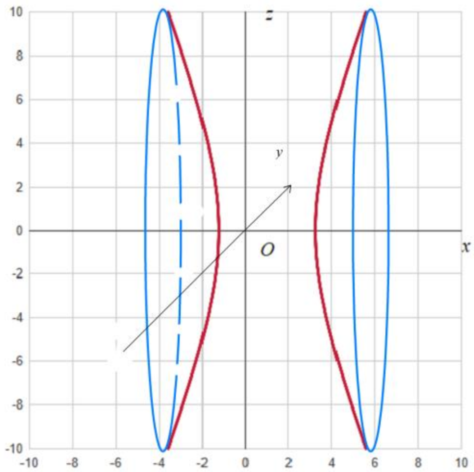
$$\frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{200} = 1$$

с полуосями $a = 2\sqrt{2}$ и $b = 10\sqrt{2}$ и центром в точке $(7;0;0)$ на плоскости, параллельной YOZ.

Проведем в плоскости x=7 оси $O'Y'$ и $O''Z'$ параллельно осям OY и OZ и построим эллипс:



Теперь сделаем чертеж поверхности:



Задача №2.

Определить тип поверхности второго порядка, заданной уравнением:

$$x^2 - 9y^2 - 4x - 18y - 9z - 32 = 0$$

Привести уравнение поверхности к каноническому виду. Найти сечение поверхности плоскостями:

а) y = -1;

б) x = 2;

Решение:

$(x^2 - 4x + 4)$ - 4 – $9(y^2 + 2y + 1) + 9 - 9z - 32 = 0$

$(x-2)^2$ - $9(y+1)^2 - 9z - 27 = 0$

$(x-2)^2$ - $9(y+1)^2 = 9\,(z+3)$

$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{1} = z + 3$ - гиперболический параболоид

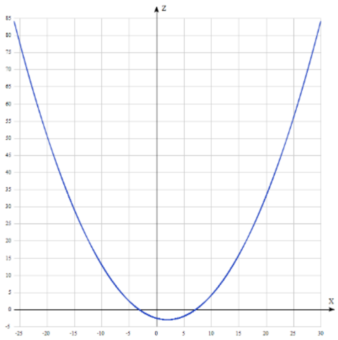
а) y = -1 $\Longrightarrow \frac{(x-2)^2}{9} = z + 3$ - уравнение параболы

б) x = 2 $\Longrightarrow\ -\frac{(y+1)^2}{1} = z + 3$ - уравнение параболы

а) $z = \frac{(x-2)^2}{9} - 3$

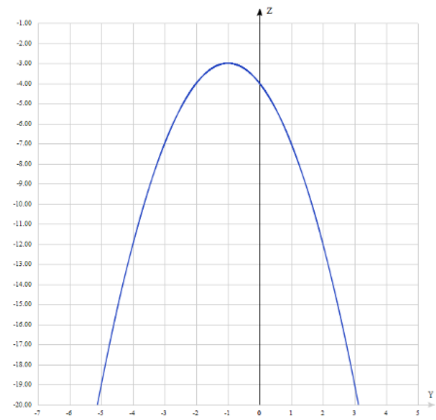
Координаты вершины

0 (-2; -1; -3)



Z = 0 $\Longrightarrow$ $(x-2)^2$ = 27 $\Longrightarrow$ x = 2 $\pm 3\sqrt{3}$ - координаты точек пересечения с осью ОХ

б) Z = - $(\mathrm{y}+1)^2$ – 3



Задача №3. Найти точки пересечения поверхности и прямой:

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ и $\frac{x}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{4}$

Решение: запишем параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = -3t \\ z = -2 + 4t \end{cases}$$

и подставим в уравнение однополостного гиперболоида

$\frac{(4t)^2}{16} + \frac{(-3t)^2}{9} - \frac{(4t-2)^2}{4} = 1$

$t^2 + t^2 - \frac{1}{4}(16t^2 - 16t + 4) = 1$

$2t^2 - 4t^2 + 4t - 1 = 1$

$t^2 - 2t + 1 = 0$

$(t-1)^2 = 0 \Longrightarrow$ t =1 $\Longrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \\ z = 2 \end{cases}$

Прямая и поверхность имеют единственную общую точку М (4; -3; 2).

Задача №4. Найти точку (точки) пересечения поверхности, задаваемой уравнением

$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 10z - 19 = 0$ и прямой $\frac{x+5}{3} = \frac{y+11}{5} = \frac{z-9}{-4}$.

Решение.

Приведем уравнение поверхности к каноническому виду, выделив полные квадраты по переменным *x*, *y*, *z*.

$(x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 2y + 1) - 1 + (z^2 + 10z + 25) - 25 - 19 = 0.$

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 5)^2 = 49$ - сфера с центром $C(-2; 1; -5)$.

Зададим прямую параметрически: $\begin{cases} x = 3t - 5 \\ y = 5t - 11 \\ z = -4t + 9 \end{cases}$

Найдем параметр t, соответствующий точкам пересечения поверхности и прямой. Подставим параметрические уравнения в уравнение поверхности.

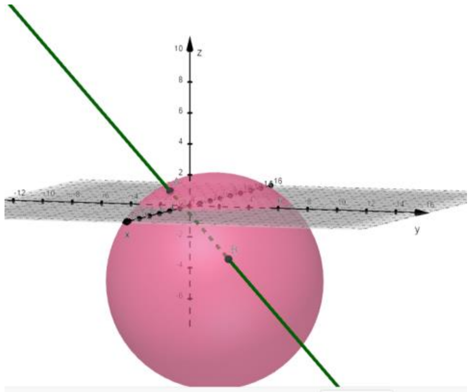
$$(3t - 5 + 2)^2 + (5t - 11 - 1)^2 + (-4t + 9 + 5)^2 = 49$$

$(3t - 3)^2 + (5t - 12)^2 + (-4t + 14)^2 = 49.$

$9t^2 - 18t + 9 + 25t^2 - 120t + 144 + 16t^2 - 112t + 196 = 49.$

$$50t^2 - 250t + 300 = 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0$$

$t_1 = 2, t_2 = 3$ – имеется две точки пересечения прямой с поверхностью.



$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -1 \\ z_1 = 1 \end{cases} \text{и} \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 4 \\ z_2 = -3 \end{cases}$$

Откуда:

$M_1(1; -1; 1); M_2(4; 4; -3)$.

<u>Задача № 5</u>. Установить, какая кривая определяется уравнениями:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{3} = 2z \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

<u>Решение</u>: x = 2y – 2 - подставим в уравнение поверхности

$\frac{(2y-2)^2}{4}$ - $\frac{y^2}{3}$ = 2z

$\frac{4(y-1)^2}{4}$ - $\frac{y^2}{3}$ = 2z

$3(y-1)^2$ - y^2 = 6z

$3y^2$ - 6y + 1 - y^2 = 6z

$2y^2$ - 6y + 1 = 6z

2 $(y - \frac{3}{2})^2$ = 6z + $\frac{7}{2}$

$\mathbf{(y - \frac{3}{2})^2 = 3(z + \frac{7}{12})}$ уравнение параболы

Задача №6. Установить взаимное расположение точек *A*(-1;5;7), *B*(1;2;2), *C*(0;1;-3) и сферы

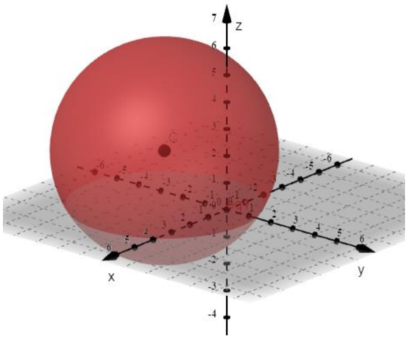
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z - 7 = 0$

Решение. Выделим полные квадраты по переменным *x*, *y*, *z*:

$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 4y + 4) - 4 + (z^2 - 4z + 4) - 4 - 7 = 0$$

$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 16$ – сфера с центром

O(1;-2;2), радиуса 4.



Подставим координаты каждой точки в уравнение сферы:

A(-1;5;7): $(-1+1)^2+(5+2)^2+(7-2)^2=74>16$, значит A лежит вне сферы.

B(1;2;2): $(1-1)^2+(2+2)^2+(2-2)^2=16$, значит B лежит на сфере.

C(0;1;3): $(0-1)^2+(1+2)^2+(3-2)^2=11<16$, значит C лежит внутри сферы.

Задача №7. При каком наибольшем целом значении параметра a заданная поверхность $x^2+2y^2+z^2-2x+12y-4z+\ a=0$ будет эллипсоидом?

Решение. Как и ранее, выделим полные квадраты по переменным x, y, z:

$(x^2-2x+1)-1+2(y^2+6y+9)-18+(z^2-4z+4)-4+\ a=0$

$(x-1)^2+2(y+3)^2+(z-2)^2=23-a$

Выражение в правой части $23-a>0$, следовательно, $a<23 \Rightarrow a=22$ - наибольшее целое подходящее значение параметра.

Ответ. a =22.

Задача№8. При каком значении параметра a данное уравнение $x^2+2y^2-z^2-2x+12y+4z+\ a=0$ будет задавать конус?

Решение. Как и ранее, выделим полные квадраты по переменным x, y, z:

$(x^2-2x+1)-1+2(y^2+6y+9)-18-(z^2-4z+4)+4+\ a=0.$

$(x-1)^2$+$2(y+3)^2$ -$(z-2)^2 = 15 - a$.

$15 - a = 0$, следовательно, $a = 15$.

Ответ: a =15.

Задача №9. Найти наибольшее целое значение параметра a, при котором данное уравнение $x^2 + 2y^2 - z^2 - 2x + 12y + 4z + a = 0$ будет задавать однополостный гиперболоид?

Решение.

Как и ранее, выделим полные квадраты по переменным *x*, *y*, *z*:

$(x^2 - 2x + 1) - 1 + 2(y^2 + 6y + 9) - 18 - (z^2 - 4z + 4) + 4 + a = 0$

$(x-1)^2$+$2(y+3)^2 - (z-2)^2 = 15 - a$

$15 - a > 0$, следовательно, $a < 15$ и $a = 14$ - наибольшее целое значение параметра a.

Ответ: a =14.

Задача №10. Исследовать форму и расположение поверхности $4 - z = x^2 + y^2$ методом сечений.

Решение. $x^2 + y^2 \geq 0 => 4 - z \geq 0 => z \leq 4$

В сечении поверхности горизонтальной плоскостью *z*=0 и *z*=*h* получаем:

При *z*=0 окружность $x^2 + y^2 = 4$ с радиусом 2

При *z*=*h*:

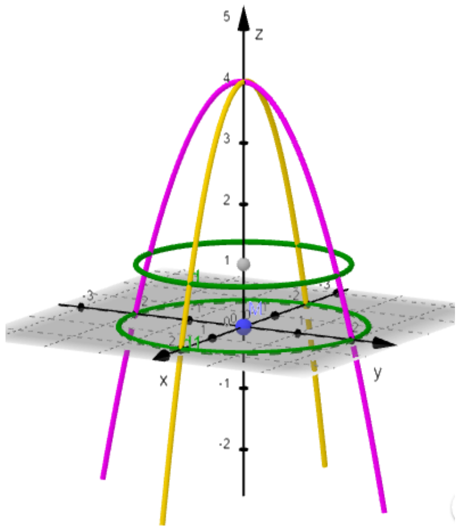
h<4 окружность $x^2 + y^2 = 4 - h$

h=4 точка C(0;0;4)

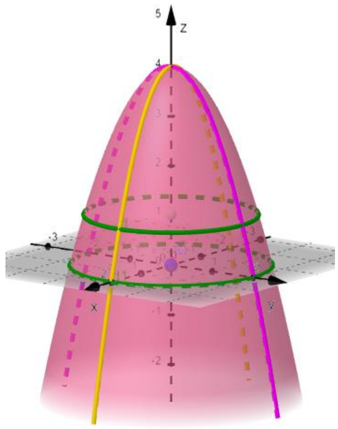
h>4 : нет пересечения с поверхностью

Произведем сечение плоскостью x=0. Сечением является кривая $y^2 = -(z - 4)$. Это парабола с центром в точке C(0;0;4). Ветви параболы направлены вниз.

Произведем сечение плоскостью y=0. Сечением является кривая $x^2 = -(z - 4)$. Это парабола с центром в точке C(0;0;4). Ветви параболы направлены вниз.



Исследование методом сечений показало, что данная поверхность является эллиптическим параболоидом с вершиной в точке C(0;0;4).



ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти координаты центра и радиус сферической поверхности, заданной уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z - 6 = 0$.

2. Составить уравнение сферы с центром в точке $\mathrm{C}(1; -1; -1)$ и сделать чертеж, если известно, что сфера проходит через точку $M(4; 2; 2)$.

3. Составить уравнение сферы с центром в точке $\mathrm{C}(0; 4; 0)$ и сделать чертеж, если известно, что сфера касается плоскости $2x + 6y - 3z - 3 = 0$.

4. Составить уравнение сферы и сделать чертеж, если известно, что точки $M(2;5;-7)$ и $N(6;-1;3)$ - концы одного из ее диаметров.

5. Методом сечений исследовать форму и расположение относительно системы координат следующих поверхностей. Сделать чертеж.

а) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$; б) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{4}=-1$;

в) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}-\frac{z^2}{2}=0$; г) $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{1}=2z$;

д) $2y^2+z^2=1-x$; е) $x^2+y^2=2(z-1)^2$;

ж) $3x^2-y^2-z^2=3$; з) $3y^2+(z+1)^2-6x=0$.

6. Установить тип заданной поверхности. Сделать чертеж.

а) $2x^2+y^2-z^2-4x-6y=0$;

б) $y^2+3z^2-x-3y+6z-2=0$.

в) $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-19=0$

7. Найти точку (точки) пересечения поверхности, задаваемой уравнением $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$ и прямой $\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}$.

8. Найти точку (точки) пересечения поверхности, задаваемой уравнением $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z$ и прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+3}{-2}$.

9. Найти точку (точки) пересечения поверхности, задаваемой уравнением $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=z$ и прямой $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{2}$.

10. Установить тип кривой, по которой плоскость $y+6=0$ пересекает гиперболический параболоид $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=6z$. Сделать чертеж.

11. Установить тип кривой, по которой плоскость $z+1=0$ пересекает однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$. Сделать чертеж.

12. Установить тип кривой, по которой плоскость $x-2=0$ пересекает эллипсоид $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1$. Сделать чертеж.