Обзорная лекция – часть 2.

Квадратичные формы.

Определение. Функция $\varphi(\vec{x}) = A(\vec{x}, \vec{x})$, где $A(\vec{x}, \vec{y})$ симметричная билинейная форма, называется *квадратичной формой.*

Матрица квадратичной формы в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_2) & \dots & \mathrm{A}(\vec{e}_1, \vec{e}_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{A}(\vec{e}_n, \vec{e}_1) & \dots & \mathrm{A}(\vec{e}_n, \vec{e}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

А – симметричная матрица, $a_{ij} = a_{ji}$.

$$\varphi(\vec{x}) = (x_1 \dots x_n)\mathrm{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

$(x_1 \dots x_n)\mathrm{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = X^T A X$ – векторно-матричная форма записи квадратичной формы.

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ – координатная форма записи квадратичной формы.

Для квадратичной формы в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$$\varphi(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 .$$

<u>Преобразование координат квадратичной формы при переходе к другому базису</u>

Если A_1 – матрица квадратичной формы в базисе S_1, A_2 – матрица квадратичной формы в базисе S_2, P – матрица перехода от S_1 к S_2, тогда: $\mathrm{A}_2 = P^T \mathrm{A}_1 P$.

Определение. Квадратичную форму $\varphi(\vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_i x_i^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$, не имеющую попарных произведений переменных, называют *квадратичной формой канонического вида.*
Базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называют *каноническим базисом*.
В каноническом базисе матрица квадратичной формы имеет диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \lambda_i & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ранг и индексы инерции квадратичной формы.
Ранг матрицы квадратичной формы не меняется при замене базиса.
Определение. Рангом квадратичной формы ($\mathrm{rang}\,\varphi(\vec{x}) = r$) называется ранг матрицы квадратичной формы в любом базисе.
Ранг квадратичной формы не меняется при замене базиса.

<u>Теорема.</u> Для любой квадратичной формы существует канонический базис. В другой формулировке, любая квадратичная форма невырожденным преобразованием координат приводится к сумме квадратов.
Таким образом, ранг квадратичной формы равен количеству ненулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы.

Квадратичная форма называется **вырожденной**, если её ранг меньше размерности пространства $r\ \varphi(\vec{x}) < dimV$, и **невырожденной**, если её ранг равен размерности пространства $r\varphi(\vec{x}) = dimV$.
Положительный индекс r_+ - количество положительных коэффициентов в каноническом виде.
Отрицательный индекс r_- - количество отрицательных коэффициентов в каноническом виде.
Очевидно, что $r_+ + r_- = r$.
Закон инерции квадратичных форм (теорема) Положительный и отрицательный индексы инерции квадратичной формы не зависят от выбора канонического базиса. Другая формулировка: Количество положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы не зависит от выбора канонического базиса.
Определение. Квадратичная форма называется *положительно определенной*, если $\forall\vec{x} \neq \vec{o}: \varphi(\vec{x}) > 0$.
Определение. Квадратичная форма называется *отрицательно определенной*, если $\forall\vec{x} \neq \vec{o}: \varphi(\vec{x}) < 0$.
Если квадратичная форма не является положительно или отрицательно определенной, то говорят, что она *общего вида*, или *знакопеременная*.

Исследование квадратичной формы на знакоопределенность

1 способ - по каноническому виду:

Теорема.

1) Квадратичная форма положительно определена $\Leftrightarrow$она невырожденная и все коэффициенты в ее каноническом виде положительные:
   $(r = r_+ = dim\,V)$.
2) Квадратичная форма отрицательно определена $\Leftrightarrow$ она невырожденная и все коэффициенты в ее каноническом виде отрицательные:
   $(r = r_- = dim\,V)$.

2 способ - по критерию Сильвестра:

1) Квадратичная форма положительно определена $\Leftrightarrow$ все главные (угловые) миноры матрицы квадратичной формы положительные.
2) Квадратичная форма отрицательно определена $\Leftrightarrow$ знаки главных миноров матрицы квадратичной формы чередуются, начиная с минуса.

Критерий Сильвестра для трехмерного пространства:

1) $$\begin{matrix} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 > 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \text{квадратичная форма положительно определена;}$$

2) $$\begin{matrix} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \Delta_3 < 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \text{квадратичная форма отрицательно определена;}$$

3) во всех остальных случаях квадратичная форма знакопеременная, или общего вида.

Задача 1. Дана квадратичная форма

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$. Она является

положительно определенной

отрицательно определенной

общего вида

канонической

Решение: : $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$; $\Delta_1 = 3 >$; $\Delta_2 = 8 > 0$; $\Delta_3 = 36 > 0$

=> положительно определенная

Задача 2. Выписать матрицу квадратичной формы Для данной квадратичной формы $\boldsymbol{\varphi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3}$ определить положительный индекс $\boldsymbol{r_+}$, отрицательный индекс $\boldsymbol{r_-}$ и ранг. В ответе написать целое трехзначное число Rg $\boldsymbol{r_+ r_-}$ без пробелов и запятой.

Так как квадратичная форма положительно определенная, то ответ известен.
Ответ: 330

Другое условие , тоже задание:

$\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (4x_2x_3 + 4x_3^2) = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (2x_3 + x_2)^2 - x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

Ответ: 321

Задача 3. Найти все значения параметра λ, при котором положительно определена следующая квадратичная форма. В ответе указать наименьшее целое значение λ, при котором положительно определена квадратичная форма

$$Q = 2x_1^2 + \lambda x_2^2 + 2\lambda x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2\lambda x_2x_3$$

Решение. Составим матрицу квадратичной формы.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & 2\lambda \end{pmatrix}$$

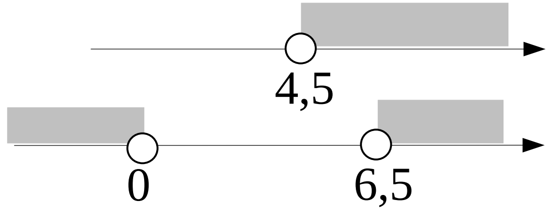
Рассмотрим миноры I, II и III-го порядков матрицы B.

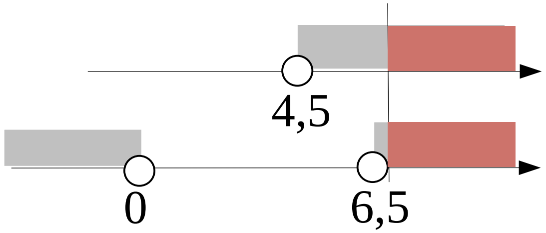
$M_1 = 2 > 0,\ M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda - 9,$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2 + 3\lambda + 3\lambda - \lambda - 2\lambda^2 - 18\lambda = 2\lambda^2 - 13\lambda$$

Чтобы форма была положительно определенной, по критерию Сильвестра необходимо чтобы все главные миноры были положительными.

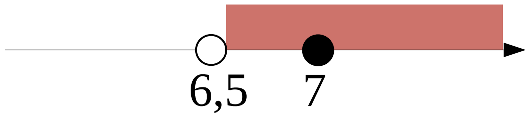
Решим систему неравенств:

$\begin{cases}2\lambda-9>0\\2\lambda^2-13\lambda>0\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda>4{,}5\\\lambda(2\lambda-13)>0\end{cases}$	



Общее решение $\lambda > 6{,}5$

<u>Наименьшее целое</u> значение λ, при котором положительно определена квадратичная форма равно **7**.



Задача 4. Найти все значения параметра a, при котором отрицательно определена следующая квадратичная форма. В ответе указать наименьшее целое значение a, при котором она отрицательно определена.

$$Q = -4x_1^2 + ax_2^2 - 3x_3^2 - 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 - 2ax_2x_3$$

Решение. Составим матрицу квадратичной формы.

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -a & 1 \\ -a & a & -a \\ 1 & -a & -3 \end{pmatrix}$$

Чтобы форма была отрицательно определенной, по критерию Сильвестра необходимо, чтобы все главные миноры знакочередовались, начиная с минуса.

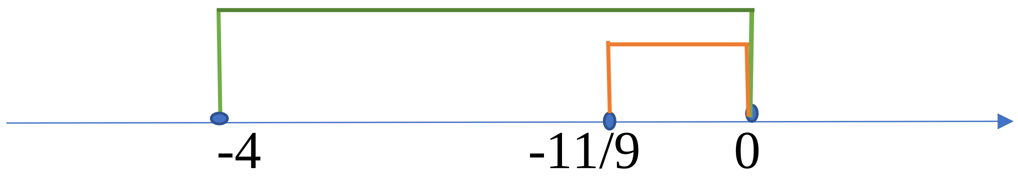
Рассмотрим миноры I, II и III-го порядков матрицы B.

$$M_1 = -4 < 0, \;\; M_2 = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -4a - a^2 > 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} -4 & -a & 1 \\ -a & a & -a \\ 1 & -a & -3 \end{vmatrix} = 12a + 2a^2 - a + 3a^2 + 4a^2 = 9a^2 + 11a < 0$$

Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} a(4+a) < 0 \\ 9a^2 + 11a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(4+a) < 0 \\ a(9a+11) < 0 \end{cases}$$



Общее решение: $-11/9 < a < 0$

Ответ: a= -1.

Задача 5. Найти тип и каноническое уравнение кривой второго порядка

$$16x^2+9y^2+24xy+130x-90y-125=0$$

Решение. Рассмотрим уравнение кривой: $\underbrace{16x^2+9y^2+24xy}_{\text{квадратичная часть}}+130x-90y-125=0$

Выпишем матрицу квадратичной части:

Матрица квадратичной формы: $A=\begin{pmatrix}16 & 12\\ 12 & 9\end{pmatrix}$

Найдем корни характеристического уравнения $|A_e-\lambda E|=0$.

$$|A_e-\lambda E|=\begin{vmatrix}16-\lambda & 12\\ 12 & 9-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-25\lambda=\lambda(\lambda-25)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\lambda_1=0\\ \lambda_2=25\end{array}\right.$$ - собственные значения.

Найдем собственный вектор, относящийся к собственному значению $\lambda_1=0$:

$$\begin{pmatrix}16 & 12\\ 12 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}16 & 12\\ 12 & 9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4 & 3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Решением являются векторы $U_{\lambda_1}=\mathrm{C}_1\begin{pmatrix}3\\ -4\end{pmatrix}$, $C_1\neq 0$, базисом пространства решений является вектор $u_1=(3;4)^T$. Нормируем его: $h_1=(\frac{3}{5};\frac{-4}{5})$

Найдем собственный вектор, относящийся к собственному значению $\lambda_2 = 25$:

$$\begin{pmatrix} -9 & 12 \\ 12 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решением являются векторы $U_{\lambda_2} = \mathrm{C}_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C_2 \neq 0$, базисом пространства решений является вектор $u_2 = (4; 3)^T$. Нормируем его: $h_2 = (\frac{4}{5}; \frac{3}{5})$

$H = \{\overline{h}_1, \overline{h}_2\}$ - собственный ортонормированный базис.

Перейдем к новым координатам (x', y') с помощью матрицы перехода от исходного ортонормированного базиса $\{\overline{i}, \overline{j}\}$ к собственному ортонормированному базису $\{\overline{h}_1, \overline{h}_2\}$

$U = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$ - матрица перехода

Искомое преобразование $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

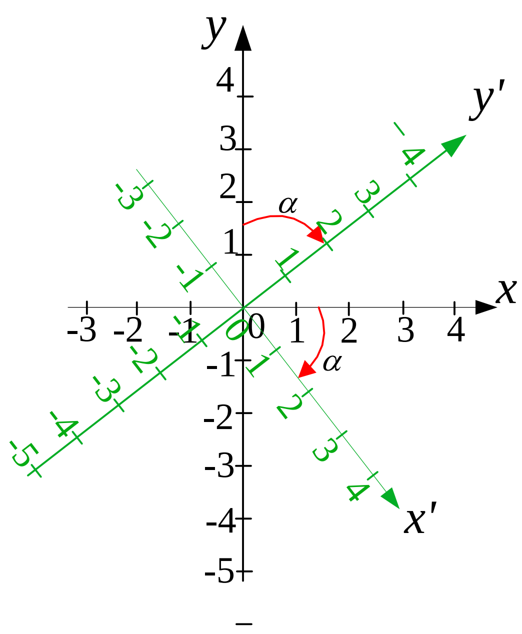
Выпишем преобразование координат:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{5}x' + \dfrac{4}{5}y' = x' \cos\alpha \ \ + y' \sin\alpha \\ y = \dfrac{-4}{5}x' + \dfrac{3}{5}y' = -x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{cases}$$

Матрица линейного оператора : Поворот по часовой стрелки на угол α:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Данное преобразование соответствуют повороту системы координат на угол α : $tg\alpha = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}$ по часовой стрелке: по y 4 единицы, по x - 3 единицы



Перейдем к новым координатам, подставив x' и y' в уравнение кривой:

$$16\left(\frac{3x'+4y'}{5}\right)^2+9\left(\frac{3y'-4x'}{5}\right)^2+24\left(\frac{3x'+4y'}{5}\right)\left(\frac{3y'-4x'}{5}\right)-130\left(\frac{3x'+4y'}{5}\right)-90\left(\frac{3y'-4x'}{5}\right)-125=0$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$\frac{16}{25}(9x'^2+24x'y'+16y'^2)+\frac{24}{25}(-12x'^2+4x'y'+12y'^2)+\frac{9}{25}(16x'^2-24x'y'+16y'^2)+$$

$$-\frac{130}{5}(3x'+4y')-\frac{90}{5}(3y'-4y')-125=0$$

$$25y'^2+150x'+50y'-125=0$$
$$y'^2+6x'+2y'-5=0$$

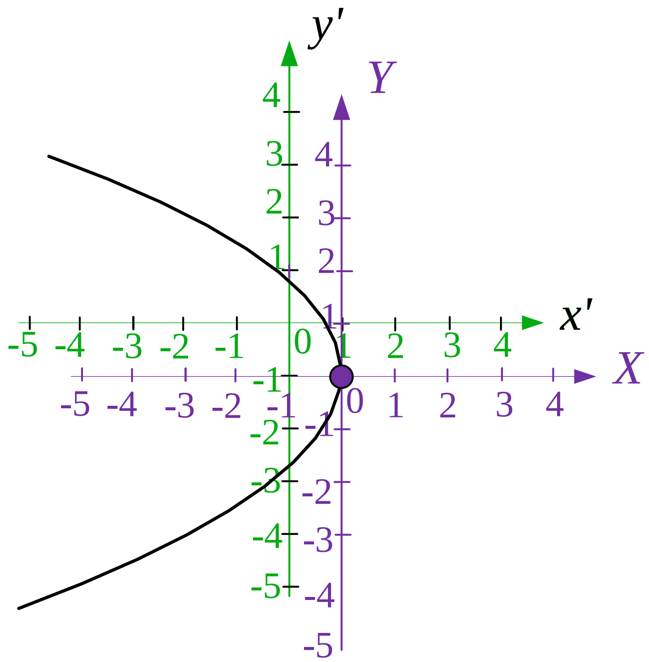
Выделим полный квадрат по переменной y'.

$$(y'^2+2y'+1)-1-5+6x'=0$$

$(y'+1)^2=-6(x'-1)$

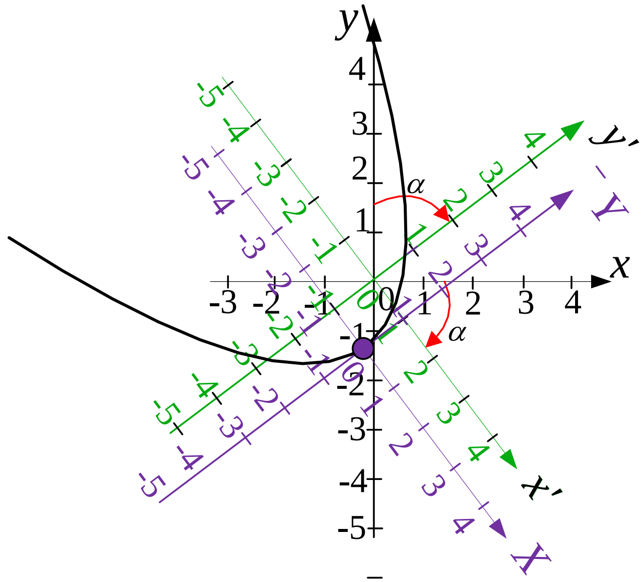
Преобразование параллельного переноса запишется в виде $\begin{cases} X=x'-1 \\ Y=y'+1 \end{cases}$

Получаем каноническое уравнение параболы $Y^2=-6X$



$$\begin{cases} x = \frac{3}{5}(X+1) + \frac{4}{5}(Y-1) = \frac{3}{5}X + \frac{4}{5}Y - \frac{1}{5} \\ y = \frac{-4}{5}(X+1) + \frac{3}{5}(Y-1) = \frac{-4}{5}X + \frac{3}{5}Y - \frac{7}{5} \end{cases}$$

Новый центр системы координат $O''(\frac{-1}{5}; \frac{-7}{5})$.


y
x
y'
x'
Y
X
α
α

Скалярное произведение

Определение. Скалярным произведением векторов $\vec{x}, \vec{y} \in V$ называется отображение, сопоставляющее двум векторам $\vec{x}$ и $\vec{y}$ число: $(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha$, если выполнены условия:

$$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

1) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$
2) $(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \lambda\vec{y})$
3) $(\vec{x} + \vec{z}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{z}, \vec{y})$ и $(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z})$
4) $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0 \ \forall \vec{x} \in V$, причем $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

Другими словами, скалярное произведение – симметрическая билинейная форма. Причем, соответствующая ей квадратичная форма - положительно определенная.

Определение. Линейное пространство V называется *евклидовым пространством*, если в нем задано скалярное произведение. Обозначение евклидова пространства E.
Определение. Длиной (модулем) вектора в евклидовом пространстве называют величину $|\vec{\boldsymbol{x}}| = \sqrt{(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{x}})}$.

Теорема. Неравенство Коши-Буняковского. Для любых векторов $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$ имеет место неравенство $|(\vec{x}, \vec{y})|^2 \leq (\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y})$.

С помощью длин векторов неравенство Коши-Буняковского может быть переписано в виде $|(\vec{x},\vec{y})| \leq |\vec{x}|\cdot|\vec{y}|$.
Определение. Углом между ненулевыми векторами в евклидовом пространстве называют значение $\varphi \in [0,\pi]$, определяемое равенством:

$$\boldsymbol{\cos\varphi = \frac{(\vec{x},\vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|}}\,.$$

Корректность формулы следует из *неравенства Коши-Буняковского*.

Определение. Два ненулевых вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю: $\vec{x}\perp\vec{y} \Leftrightarrow (\vec{x},\vec{y}) = 0$.

Определение. Вектор называется *нормированным (единичным)*, если его длина равна единице: $|\vec{x}| = 1$.

Определение. Базис $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$называется *ортонормированным,* если векторы базиса нормированы и попарно ортогональны, то есть:

$$(\vec{e}_i,\vec{e}_j) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j, \\ 1 \text{ при } i = j. \end{cases}$$

Матрица Грама.

Определение. Матрица из попарных скалярных произведений векторов в фиксированном базисе S называется *матрицей Грама скалярного произведения в этом базисе:*

$$G_{\vec{b}} = \begin{pmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) & (\vec{e}_1, \vec{e}_2) & \dots & (\vec{e}_1, \vec{e}_n) \\ (\vec{e}_2, \vec{e}_1) & (\vec{e}_2, \vec{e}_2) & \dots & (\vec{e}_2, \vec{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\vec{e}_n, \vec{e}_1) & (\vec{e}_n, \vec{e}_2) & \dots & (\vec{e}_n, \vec{e}_n) \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица G – является матрицей Грама некоторого скалярного произведения в евклидовом пространстве тогда и только тогда, когда она 1) симметричная; 2) положительно определенная, т.е. все ее главные миноры положительные.

Пусть в евклидовом пространстве в некотором базисе заданы два вектора:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$, тогда $(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 \dots x_n) \cdot G \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T \cdot G \cdot Y$.

При замене базиса матрица Грама меняется по формуле: $\boldsymbol{G_2 = P^T G_1 P}$, где G_1 и G_2 – матрицы Грама в базисах S_1 и S_2 соответственно, а P- матрица перехода от базиса S_1 к базису S_2.

<u>Теорема.</u> В конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Матрица Грама в ортонормированном базисе является единичной матрицей.

Координатная форма скалярного произведения в ортонормированном базисе: $(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

Длина вектора $|\vec{x}| = \sqrt{{x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2}$.

Задача 7. Какие из приведенных матриц не будут матрицей Грама?

A) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ **B)** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$ **C)** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$ **D)** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} \end{pmatrix}$

Ответ: A;C;D

Задача 8. Матрица Грама скалярного произведения в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ имеет вид $G = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$. Найти скалярное произведение векторов, заданных своими координатами в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ $\bar{x}$ = (1,3) и $\bar{y}$= (2,-1).

Решение: $(\bar{x},\bar{y}) = (1\ 3)\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$=(-7 18)$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ = -32

Задача 9. В евклидовом пространстве размерности 2 скалярное произведение задано матрицей Грама $\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{81} \end{pmatrix}$. Выписать длины базисных векторов $\bar{e}_1$; $\bar{e}_2$ без пробелов и запятых.

Ответ: 29

Задача 10. Какая из матриц является матрицей Грама в ортогональном базисе?

1)*$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

2)$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3)$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

4)$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Задача 11. Матрица Грама скалярного произведения в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ имеет вид $G = \begin{pmatrix} 36 & -9 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите угол между базисными векторами. Ответ запишите в градусах.

Решение: $\cos A = \frac{-9}{6\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$;

Ответ 150.

Задача 12. Найти наименьшее целое значение параметра a, при котором матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ является матрицей Грама в каком-либо базисе пространства E_3.

Решение:

Матрица симметричная;

$$\begin{cases} 1 > 0 \\ a - 1 > 0 \\ a^2 - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ a(a-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 1$$

Ответ: $a = 2$.