

I. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Определение. Непустое множество L называется линейным пространством, а его элементы векторами, если выполняются следующие условия:

- 1) Задана операция сложения, т.е. любым двум элементам $\vec{x}, \vec{y} \in L$ ставится в соответствие элемент $\vec{x} + \vec{y} \in L$, называемый их суммой.
- 2) Задана операция умножения вектора на число, т.е. любому элементу $\vec{x} \in L$ и числу $\alpha \in R$ ставится в соответствие элемент $\alpha \vec{x} \in L$, называемый произведением элемента на число.
- 3) Для $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in L$, и $\alpha, \beta \in R$ выполняются следующие аксиомы:
 1. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
 2. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
 3. $\exists \vec{0} \in L: \forall \vec{x} \in L, \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ (нулевой вектор)
 4. $\forall \vec{x} \in L \exists (-\vec{x}) \in L: \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$ (противоположный вектор)
 5. $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
 6. $(\alpha\beta)\vec{x} = \alpha(\beta\vec{x})$
 7. $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$
 8. $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$

Замечание. Из определения линейного пространства следует, что сумма определена для любых двух элементов из L и всегда является элементом множества L . В этом случае говорят, что множество L замкнуто относительно операции сложения [3]. Произведение на число также определено для любого элемента из L и всегда является элементом множества L , тогда говорят, что множество L замкнуто относительно операции умножения на число.

Таким образом, линейное пространство L замкнуто относительно операций сложение и умножение на число, так как в результате этих операций мы получаем элементы того же пространства.

Следствия из аксиом:

Следствие 1. В линейном пространстве может быть только один нулевой вектор.

Следствие 2. Каждый элемент линейного пространства имеет только один противоположный.

Следствие 3. Введем обозначение: $\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y})$, тогда для любых $\vec{a}$ и $\vec{b} \in L$ существует единственное решение уравнения $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ в виде $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$.

Следствие 4. $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$

Следствие 5. $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Следствие 6. $-\vec{x} = (-1)\vec{x}$

Следствие 7. $\alpha(-\vec{x}) = -\alpha\vec{x}$

Определение. Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ называется выражение вида $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$; где $\lambda_i \in R$

Определение линейной зависимости: Система векторов $S = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} \in L$ называется линейно зависимой, если найдутся такие числа $\lambda_1 \dots \lambda_n \in R$, не равные одновременно нулю и такие, что $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$.

Определение линейной независимости: Если равенство $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$ возможно, только когда $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, то система векторов $S = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} \in L$ называется линейно независимой.

Критерий линейной зависимости:

Система векторов $S = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} \in L, n \geq 2$, линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из ее векторов можно представить в виде линейной комбинации остальных.

Геометрический смысл линейной зависимости.

Рассмотрим S - систему геометрических векторов в трехмерном пространстве.

1. Система, состоящая из одного ненулевого вектора $S = \{\vec{a}\}, \vec{a} \neq \vec{0}$ линейно - независима.
2. Система из двух векторов $S = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ линейно зависима $\Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ (векторы коллинеарны).

3. Система из трех векторов $S = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ линейно зависима $\Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ (векторы компланарны).
4. Система, состоящая более чем из трех векторов, линейно зависима.

Базис и размерность линейного пространства

Определение. Система векторов $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\} \in L$ называется полной, если любой вектор $\vec{x} \in L$ можно представить в виде линейной комбинации векторов системы: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$.

Определение. Упорядоченная система векторов $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\} \in L$ называется базисом линейного пространства L , если она линейно-независимая и полная.

$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$ – разложение вектора по базису, $(x_1, \dots, x_n)$ – координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$.

Теорема. Координаты вектора $\vec{x}$ в базисе S определены однозначно.

Теорема. Координаты суммы (разности) векторов равны сумме (разности) их координат. Координаты произведения вектора на число равны произведению координат на число.

Определение. Линейное пространство, в котором существует базис из n векторов, называется n -мерным, $\dim L = n$.

Теорема. В n -мерном линейном пространстве любая линейно-независимая упорядоченная система из n векторов образует базис.

Теорема. В n -мерном линейном пространстве L любая полная упорядоченная система из n векторов образует базис.

Теорема. В n -мерном линейном пространстве L каждую систему из k линейно-независимых векторов можно дополнить до базиса.

Базисы линейных пространств:

- 1) V_2 - пространство геометрических векторов на плоскости. Канонический базис в $V_2: \{\vec{i}, \vec{j}\}$. $\dim V_2 = 2$.

Координаты произвольного вектора $\vec{x} \in V_2$ в каноническом базисе:

$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x, y).$$

Координаты базисных векторов в этом же базисе:

$$\vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j} = (1,0), \quad \vec{j} = 0\vec{i} + 1\vec{j} = (0,1).$$

2) V_3 - пространство геометрических векторов.

Канонический базис в $V_3: \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, $\dim V_3 = 3$.

Координаты произвольного вектора $\vec{x} \in V_3$ в каноническом базисе:

$$\vec{x} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z).$$

Координаты базисных векторов в этом же базисе:

$$\vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} = (1,0,0), \quad \vec{j} = 0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k} = (0,1,0),$$

$$\vec{k} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k} = (0,0,1).$$

3) Определим пространство арифметических векторов R^n . Его элементы представляют собой упорядоченную совокупность n чисел, т.е. это элементы вида $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $x_i \in \mathbb{R}$;

$\dim R_n = n$. Канонический базис:

$$\vec{e}_1 = (1,0,\dots,0), \vec{e}_2 = (0,1,\dots,0), \dots, \vec{e}_n = (0,0,\dots,1).$$

Координаты произвольного вектора:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n = (x_1, \dots, x_n).$$

4) $P_n = \{p(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n\}$ - пространство многочленов степени не выше n .

Канонический базис: $\vec{e}_0=1, \vec{e}_1 = t, \vec{e}_2 = t^2, \dots, \vec{e}_n = t^n$. $\dim P_n = n + 1$.

Координаты многочлена $p(t)$ в каноническом базисе:

$$p(t) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + \dots + a_n \cdot t^n = (a_0, a_1, \dots, a_n).$$

5) Пространство матриц размера $m \times n$, $M_{m \times n}$.

Рассмотрим на примере $M_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$.

Канонический базис:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тогда } \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = a \cdot E_1 + b \cdot E_2 + c \cdot E_3 + d \cdot E_4 + e \cdot E_5 + f \cdot E_6.$$

(a, b, c, d, e, f) – координаты матрицы в каноническом базисе.

$$\dim M_{2 \times 3} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Преобразование координат вектора при переходе к другому базису

Пусть L – линейное пространство. $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ – старый базис пространства, $S' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n\}$ – новый базис пространства. Разложим каждый вектор $\vec{f}_i$ нового базиса по старому базису S :

$$\vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + \dots + a_{n1}\vec{e}_n = (a_{11} \dots \dots a_{n1})$$

...

$$\vec{f}_n = a_{1n}\vec{e}_1 + \dots + a_{nn}\vec{e}_n = (a_{1n} \dots \dots \dots a_{nn})$$

составим из полученных координат матрицу, записывая координаты векторов $\vec{f}_i$ по столбцам. Получим P – матрицу перехода от старого базиса S к новому базису S' :

$$P = P_{S \rightarrow S'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теорема. Матрица перехода P невырожденная, т. е. $\det P \neq 0$.

Теорема. Пусть $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)_S$, и $X' = (x_1, x_2, \dots, x_n)_{S'}$ – координаты вектора $\vec{x}$ в базисах S и S' соответственно, P – матрица перехода от базиса S к

базису S' . Тогда $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P_{S \rightarrow S'}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ или $X' = P_{S \rightarrow S'}^{-1} \cdot X$.

Это формула преобразования координат при замене базиса.

Линейные подпространства

Определение. Непустое подмножество H линейного пространства L называется линейным подпространством, если оно само является линейным пространством относительно операций сложения и умножения на число, заданных в линейном пространстве L .

Теорема. Для того, чтобы непустое подмножество H линейного пространства L было его линейным подпространством, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

- 1) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in H \quad \vec{x} + \vec{y} \in H$ (замкнутость H относительно операции сложения);
- 2) $\forall \vec{x} \in H$ и $\alpha \in R \quad \alpha \vec{x} \in H$ (замкнутость H относительно операции умножения на число).

Разбор задач типового расчета

Задача 2.1. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ заданы своими координатами в каноническом базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ линейного пространства V_3 . Показать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис пространства V_3 . Найти разложение вектора $\vec{d}$ по этому базису с помощью матрицы перехода. Сделать проверку.

$$\vec{a} = (1, 2, 0), \vec{b} = (-1, 3, 2), \vec{c} = (-2, 0, 4), \vec{d} = (1, 1, 2).$$

Решение:

- 1) Покажем, что $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ - базис пространства V_3 . Так как $\dim V_3 = 3$, то достаточно проверить векторы на линейную независимость:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \Rightarrow$$

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ - линейно независимы и образуют базис в V_3 .

- 2) Разложим вектор $\vec{d}$ по базису $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

$$P_{\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \rightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 6 \\ -8 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 6 \\ -8 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 3) Сделаем проверку: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ - верно.

Ответ: $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Задача 2.2. Является ли множество векторов заданного вида линейным подпространством в R^3 ? Если да, то найти базис и размерность этого подпространства. Дополнить базис подпространства L до базиса всего пространства R^3 . Выписать матрицу перехода от канонического базиса пространства R^3 к построенному базису.

$$\text{а) } \{(a, 2a + b, -3b)\} \quad \text{б) } \{(a, 2a + 1, -3b)\}.$$

$$\text{а) } L = \{(a, 2a + b, -3b)\}.$$

Решение:

1) Проверим, является ли L линейным подпространством в R^3 .

$$\text{Пусть } \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 + b_1 \\ -3b_1 \end{pmatrix} \in L, \vec{y} = \begin{pmatrix} a_2 \\ 2a_2 + b_2 \\ -3b_2 \end{pmatrix} \in L.$$

$$\text{а) } \vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 2a_1 + b_1 + 2a_2 + b_2 \\ -3b_1 - 3b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 2(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \\ -3(b_1 + b_2) \end{pmatrix}.$$

$$\text{Обозначим } a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2. \quad \text{Тогда } \vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} a \\ 2a + b \\ -3b \end{pmatrix} \in L.$$

Следовательно, множество L замкнуто относительно операции сложения.

$$\text{б) Пусть } \lambda \in R. \text{ Тогда } \lambda \vec{x} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ 2\lambda a_1 + \lambda b_1 \\ -3\lambda b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a + b \\ -3b \end{pmatrix} \in L,$$

$(a = \lambda a_1, b = \lambda b_1)$. Следовательно, множество L замкнуто относительно операции умножения на число.

Таким образом, L – линейное подпространство пространства R^3 .

2) Найдем базис и размерность подпространства L :

$$a = 1, b = 0 \Rightarrow \vec{e}_1 = (1, 2, 0),$$

$$a = 0, b = 1 \Rightarrow \vec{e}_2 = (0, 1, -3).$$

Докажем, что $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ - базис подпространства L .

Линейная независимость.

Составим матрицу из координат векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ в каноническом базисе R^3 и найдем ее ранг: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \text{rang} = 2 (\text{количеству векторов}) \Rightarrow \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ - линейно независимая система векторов.

Полнота.

$$\forall \vec{x} \in L: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 2a + b \\ -3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -3b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 \Rightarrow \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} - \text{полная система векторов.}$$

Итак, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ - базис подпространства L . $\dim L = 2$ (т.к. в базисе 2 вектора).

3) Дополним базис подпространства L до базиса всего пространства R^3 . Т.к. $\dim R^3 = 3$, то нужно добавить еще 1 вектор такой, чтобы он образовывал линейно независимую систему с $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Добавим $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$. Выпишем матрицу из координат $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{rang} = 3 (\text{количеству векторов}) \Rightarrow \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} - \text{базис в } L.$$

4) Выпишем матрицу перехода от канонического базиса пространства R^3 к построенному базису: $P_{\{\text{канонич. базис}\} \rightarrow \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, записав координаты базисных векторов по столбцам.

$$\text{b) } L = \{(a, 2a + 1, -3b)\}$$

Решение:

1) Проверим, является ли L линейным подпространством в R^3 .

$$\text{Пусть } \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 + 1 \\ -3b_1 \end{pmatrix} \in L; \vec{y} = \begin{pmatrix} a_2 \\ 2a_2 + 1 \\ -3b_2 \end{pmatrix} \in L.$$

$$а) \vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 2a_1 + 1 + 2a_2 + 1 \\ -3b_1 - 3b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 2(a_1 + a_2) + 2 \\ -3(b_1 + b_2) \end{pmatrix} \notin L.$$

Следовательно, множество L не замкнуто относительно операции сложения, и не является линейным подпространством пространства R^3 .

Задача 2.3. Проверить, что множество многочленов $L = \{p(t)\}$ заданного вида с вещественными коэффициентами образует линейное подпространство в линейном пространстве P_2 многочленов степени не выше 2. Найти размерность и базис L , дополнить его до базиса всего пространства P_2 . Найти координаты многочлена $h(t) \in L$ в базисе подпространства L .

$$p(t) = (a + 2b)t^2 + (b - a)t + (a + b), \quad h(t) = -t^2 - 2t.$$

Решение:

1) Проверим, является ли L линейным подпространством в P_2 .

Пусть $x(t) = (a_1 + 2b_1)t^2 + (b_1 - a_1)t + (a_1 + b_1) \in L$,

$$y(t) = (a_2 + 2b_2)t^2 + (b_2 - a_2)t + (a_2 + b_2) \in L.$$

а) $x(t) + y(t) = (a_1 + 2b_1 + a_2 + 2b_2)t^2 + (b_1 - a_1 + b_2 - a_2)t + (a_1 + b_1 + a_2 + b_2)$. Обозначим $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$.

Тогда $x(t) + y(t) = (a + 2b)t^2 + (b - a)t + (a + b) \in L$.

Следовательно, множество L замкнуто относительно операции сложения.

б) Пусть $\lambda \in R$. $\lambda x(t) = (\lambda a_1 + 2\lambda b_1)t^2 + (\lambda b_1 - \lambda a_1)t + (\lambda a_1 + \lambda b_1)$.

Обозначим $a = \lambda a_1, b = \lambda b_1$.

Тогда $\lambda x(t) = (a + 2b)t^2 + (b - a)t + (a + b) \in L$.

Следовательно, множество L замкнуто относительно операции умножения на число.

Таким образом, L – линейное подпространство пространства P_2 .

2) Найдем базис и размерность подпространства L :

$$a = 1, b = 0 \rightarrow e_1(t) = t^2 - t + 1 = (1, -1, 1);$$

$$a = 0, b = 1 \rightarrow e_2(t) = 2t^2 + t + 1 = (1, 1, 2).$$

Докажем, что $\{e_1(t), e_2(t)\}$ образуют базис в L .

Линейная независимость.

Составим линейную комбинацию многочленов $e_1(t), e_2(t)$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) = 0 &\Rightarrow \alpha_1(t^2 - t + 1) + \alpha_2(2t^2 + t + 1) = 0 \Rightarrow \\ (\alpha_1 + 2\alpha_2)t^2 + (-\alpha_1 + \alpha_2)t + (\alpha_1 + \alpha_2) &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Следовательно, система многочленов $\{e_1(t), e_2(t)\}$ – линейно независима.

Другой способ доказательства линейной независимости векторов:

Составим матрицу из их координат в каноническом базисе:

$$\begin{aligned} e_1(t) = t^2 - t + 1 = (1, -1, 1), \quad e_2(t) = 2t^2 + t + 1 = (1, 1, 2) &\Rightarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$\text{rang} = 2$ (количеству векторов) $\Rightarrow \{e_1(t), e_2(t)\}$ – линейно независима.

Полнота.

Для любого $p(t) = (a + 2b)t^2 + (b - a)t + (a + b) \in L$:

$$p(t) = a(t^2 - t + 1) + b(2t^2 + t + 1) \Rightarrow p(t) = ae_1(t) + be_2(t).$$

Следовательно, система многочленов $\{e_1(t), e_2(t)\}$ является полной.

Итак, $\{e_1(t), e_2(t)\}$ – базис подпространства $L \Rightarrow \dim L = 2$ (так как в базисе 2 многочлена).

3) Дополним базис подпространства L до базиса всего пространства P_2 .

Так как $\dim P_2 = 3$, то нужно добавить еще один многочлен такой, чтобы он образовывал линейно независимую систему с многочленами $\{e_1(t), e_2(t)\}$.

Возьмём $e_3(t) = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\text{rang} = 3$, тогда система многочленов $\{e_1(t), e_2(t), e_3(t)\}$ линейно независима и образует базис P_2 .

4) Найдем координаты многочлена $h(t) = -t^2 - 2t$ в базисе $\{e_1(t), e_2(t)\}$.

$$h(t) = ae_1(t) + be_2(t) \Rightarrow a(t^2 - t + 1) + b(2t^2 + t + 1) = -t^2 - 2t \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a + 2b = -1 \\ -a + b = -2 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow h(t) = e_1(t) - e_2(t) = \{1, -1\}_{\{e_1, e_2\}}.$$

Проверка: $e_1(t) - e_2(t) = (t^2 - t + 1) - (2t^2 + t + 1) = -t^2 - 2t = h(t)$.

Задача 2.4. Доказать, что множество M матриц заданного вида является линейным подпространством в линейном пространстве квадратных матриц второго порядка $M_{2 \times 2}$. Построить базис и найти размерность подпространства M .

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a - b & 2c \\ 3b + a & b \end{pmatrix}, a, b, c \in R \right\}.$$

Решение:

1) Проверим, является ли M линейным подпространством в $M_{2 \times 2}$.

$$\text{Пусть } X = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 & 2c_1 \\ 3b_1 + a_1 & b_1 \end{pmatrix} \in M, Y = \begin{pmatrix} a_2 - b_2 & 2c_2 \\ 3b_2 + a_2 & b_2 \end{pmatrix} \in M$$

$$\text{а) } X + Y = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 + a_2 - b_2 & 2c_1 + 2c_2 \\ 3b_1 + a_1 + 3b_2 + a_2 & b_1 + b_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2, c = c_1 + c_2$.

$X + Y = \begin{pmatrix} a - b & 2c \\ 3b + a & b \end{pmatrix} \in M$. Множество M замкнуто относительно операции сложения.

$$\text{б) Пусть } \lambda \in R. \lambda X = \begin{pmatrix} \lambda a_1 - \lambda b_1 & 2\lambda c_1 \\ 3\lambda b_1 + \lambda a_1 & \lambda b_1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $a = \lambda a_1$, $b = \lambda b_1$, $c = \lambda c_1$. Тогда $\lambda X = \begin{pmatrix} a - b & 2c \\ 3b + a & b \end{pmatrix} \in M$.

Множество M замкнуто относительно операции умножения на число.

Итак, M – линейное подпространство пространства $M_{2 \times 2}$.

Найдем базис и размерность подпространства M :

$$a = 1, b = 0, c = 0 \rightarrow E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a = 0, b = 1, c = 0 \rightarrow E_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a = 0, b = 0, c = 1 \rightarrow E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Докажем, что $\{E_1, E_2, E_3\}$ образуют базис в M .

Линейная независимость.

Составим линейную комбинацию матриц E_1, E_2, E_3 : $\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 = 0$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Следовательно, система матриц $\{E_1, E_2, E_3\}$ линейно независима.

Полнота.

Для любой матрицы $E \in M$:

$$E = \begin{pmatrix} a - b & 2c \\ 3b + a & b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$E = aE_1 + bE_2 + cE_3 \Rightarrow$ матрицы $\{E_1, E_2, E_3\}$ образуют полную систему.

Итак, $\{E_1, E_2, E_3\}$ – базис подпространства $M_{2 \times 2}$. Тогда $\dim M = 3$ (так как в базисе 3 матрицы).