Линейные операторы. Обзорная лекция.

1.Понятие линейного оператора. Его свойства и примеры

Пусть $\mathbb{L}$ - линейное пространство;

Определение. $\hat{\boldsymbol{A}}: L \to L$ называется **отображением** в линейном пространстве L**,** если каждому вектору $\vec{x} \in L$ ставится в соответствие единственный вектор $\vec{y} \in L$;

Тогда $\vec{y} = \hat{A}(\vec{x})$; $\vec{y}$- образ вектора $\vec{x}$; $\vec{x}$- прообраз $\vec{y}$.

$$\vec{x} \xrightarrow{\hat{A}} \vec{y}$$

Определение. Отображение $\hat{A}$, действующее в L, называется ***линейным оператором***, если выполняются следующие условия:

1) $\hat{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \hat{A}\,\vec{x} + \hat{A}\vec{y}$; $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in L$
2) $\hat{A}(\alpha\vec{x}\,) = \alpha\hat{A}\vec{x}$; $\forall\ \vec{x} \in L, \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$

Свойства линейного оператора .

$\forall \ \vec{x}, \vec{y} \in L; \quad \alpha; \beta \in \mathbb{R}.$

1) $\boldsymbol{\hat{A}(\vec{0}) = \vec{0}}$

2) $\hat{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\hat{A}\,\vec{x} + \beta\hat{A}\vec{y}$

3) $\hat{A}(-\vec{x}) = -\hat{A}\vec{x}$

4) $\hat{A}(\alpha\vec{x} - \beta\vec{y}) = \alpha\,\hat{A}\,\vec{x} - \beta\,\hat{A}\,\vec{y}$

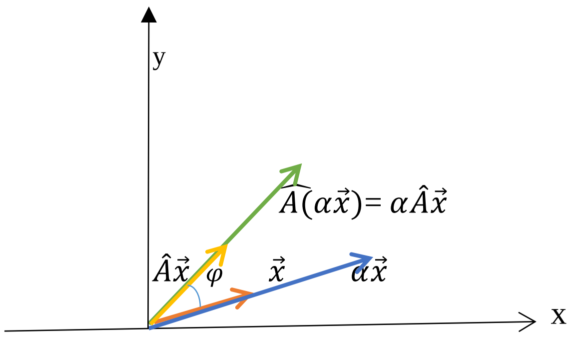
5) $\hat{A}$ переводит линейно-зависимые векторы в линейно-зависимые.

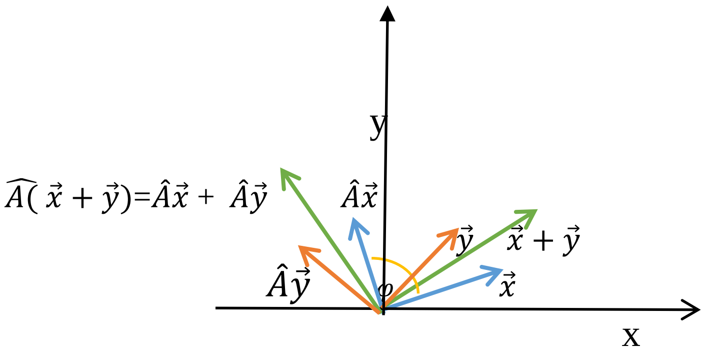
Примеры линейных операторов:

1) Нулевой оператор $\widehat{\boldsymbol{O}}: L \to L$, отображающий любой вектор пространства L в нулевой вектор этого пространства: $\widehat{\boldsymbol{O}}\vec{x} = \vec{0}\ \forall\ \vec{x} \in L$.
Действительно,
$\widehat{\boldsymbol{O}}(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{0} = \widehat{\boldsymbol{O}}\vec{x} + \widehat{\boldsymbol{O}}\vec{y}$
$\widehat{\boldsymbol{O}}(\alpha\vec{x}) = \vec{0} = \alpha\widehat{\boldsymbol{O}}\vec{x}$

2) Тождественный оператор $\hat{\boldsymbol{I}}: L \to L$, отображающий любой вектор пространства L в себя: $\hat{\boldsymbol{I}}\vec{x} = \vec{x}\ \forall\ \vec{x} \in L$ является линейным оператором (доказать самостоятельно)
$\hat{\boldsymbol{I}}(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} + \vec{y} = \hat{\boldsymbol{I}}\vec{x} + \hat{\boldsymbol{I}}\vec{y}$
$\hat{\boldsymbol{I}}(\alpha\vec{x}) = \alpha\vec{x} = \alpha\hat{\boldsymbol{I}}\vec{x}$

3) В V_2 (пространстве свободных векторов на плоскости) - поворот вектора на заданный угол φ против часовой стрелки;





4) В P_n (линейном пространстве многочленов степени не выше n) – оператор дифференцирования : $\hat{A}\big(p(t)\big) = p'(t)$

$\hat{A}: P_n \to P_n$; $(p_1(t) + p_2(t))' = (p_1(t))' + (p_2(t))'$

$$(\alpha p(t))' = \alpha(p(t))'$$

5) $\hat{A}: R^n \to R^n$ – гомотетия с коэффициентом k: $\hat{A}\vec{x} = k\vec{x}$

$\hat{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathrm{k}(\vec{x} + \vec{y}) = \mathrm{k}\vec{x} + k\vec{y} = \hat{A}\vec{x} + \hat{A}\vec{y}$;

$$\hat{A}(\alpha\vec{x}) = k(\alpha\vec{x}) = \alpha k\vec{x} = \alpha\hat{A}\vec{x};$$

Не является линейным оператором:

$\hat{A}: V_2 \to V_2$, $\hat{A}\vec{x} = \vec{x} + \vec{a}$;

$\hat{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} + \vec{y} + \vec{a} \neq \hat{A}\,\vec{x} + \hat{A}\vec{y} = \vec{x} + \vec{y} + 2\vec{a}$– не выполняется свойство линейности;

Заметим, что $\hat{A}(\vec{0}) = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} \neq \vec{0}$

2. Матрица линейного оператора .
Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.

Пусть L - конечномерное линейное пространство.

Определение*. Матрицей линейного оператора** $\widehat{\boldsymbol{A}}: L \to L$, действующего в n-мерном линейном пространстве L с базисом $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ называется матрица, составленная из координат образов базисных векторов, записанных по ***<u>столбцам.</u>

Т.е., если в L существует некоторый базис S=$\{\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_n}\}$, и

$$\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{e}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n,$$

$$\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{e}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + \cdots + a_{n2}\vec{e}_n$$

………..

$$\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{e}_n = a_{1n}\vec{e}_1 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n$$

то A= $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \dots & \boldsymbol{a_{1n}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{a_{n1}} & \dots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{pmatrix}$

Примеры:

1. Нулевой оператор $\hat{\boldsymbol{O}}: L \to L$, $\dim L = n \Rightarrow$

$$\hat{\boldsymbol{O}}\vec{e}_1 = \vec{0} = (0, \dots, 0),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\hat{\boldsymbol{O}}\vec{e}_n = \vec{0} = (0, \dots, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2. Тождественный оператор $\hat{\boldsymbol{I}}: L \to L$, $\dim L = n \Rightarrow$

$$\hat{\boldsymbol{I}}\vec{e}_1 = \vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$\hat{\boldsymbol{I}}\vec{e}_2 = \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\hat{\boldsymbol{I}}\vec{e}_n = \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1).$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$

3. Оператор $\widehat{\boldsymbol{A}}: V_3 \to V_3$ - гомотетия с коэффициентом k, $\dim V_3 = 3 \Rightarrow$

$$\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{e}_1 = k\vec{e}_1 = (k,0,0),$$

$$\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{e}_2 = k\vec{e}_2 = (0,k,0)$$

$$\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{e}_3 = k\vec{e}_3 = (0,0,k)$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

4. Оператор $\widehat{\boldsymbol{A}}: P_2 \to P_2$ - оператор дифференцирования, $\dim P_2 = 3 \Rightarrow$

$$\hat{A}\vec{e}_1 = \hat{A}(1) = (1)' = 0 = (0,0,0)$$

$$\hat{A}\vec{e}_2 = \hat{A}(t) = (t)' = 1 = (1,0,0)$$

$$\hat{A}\vec{e}_3 = \hat{A}(t^2) = (t^2)' = 2t = (0,2,0)$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 1. Если $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица линейного оператора $\widehat{\boldsymbol{A}}: L \to L$ в базисе $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, $\dim L = n$, то $\vec{y} = \widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}$ и координаты образа $\vec{y}$ произвольного вектора $\vec{x} \in L$ находятся по формуле:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Или $\quad \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{AX},$

где $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец координат вектора $\vec{y}$ в базисе $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец координат вектора $\vec{x}$ в это же базисе. Таким образом, действие линейного оператора $\hat{A}$ на вектор $\vec{x}$ сводиться к умножению некоторой матрицы $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ на вектор-столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$, составленный из координат вектора $\vec{x}$ в базисе $S = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$.

Замечание. Матрица линейного оператора полностью характеризует линейный оператор. Кроме того, любая квадратная матрица порядка n определяет линейный оператор n-мерного линейного пространства L.

Теорема 2.

Пусть в л.п. L (dim L=n) отражение $\vec{y} = \hat{A}\vec{x}$ задается формулой $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{AX}$, , где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$ - координаты векторов в базисе S, A – некоторая матрица размера nxn, Тогда $\hat{A}$ – линейный оператор и его матрица в базисе S совпадает с матрицей A.

Задача. Оператор $\hat{A}$ действует в пространстве R^3, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$. Проверить, является ли оператор $\hat{A}$ линейным. В случае линейности записать матрицу оператора $\hat{A}$ в каноническом базисе пространства R^3.

$$\text{а) } \hat{A}\vec{x} = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1 + 3x_2 - x_3, -x_2 + 2x_3)$$

$\hat{A}: R^3 \to R^3$, т.е $\hat{A}$ вектор из R^3 переводит в R^3.

Проверим линейность оператора. Подействуем линейным оператором на вектор $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

1. $\hat{A}(\vec{x} + \vec{y}) = ((x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) - 3(x_3 + y_3), 2(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3), -(x_2 + y_2) + 2(x_3 + y_3)) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1 + 3x_2 - x_3, -x_2 + 2x_3) +$
$+ (y_1 + 2y_2 - 3y_3, 2y_1 + 3y_2 - y_3, -y_2 + 2y_3) = \hat{A}\vec{x} + \hat{A}\vec{y}$;
2. Подействуем линейным оператором на вектор
$\alpha\vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$

$$\hat{A}(\alpha\vec{x}) = (\alpha x_1 + 2\alpha x_2 - 3\alpha x_3, 2\alpha x_1 + 3\alpha x_2 - \alpha x_3, -\alpha x_2 + 2\alpha x_3) =$$

$$= \alpha(x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1 + 3x_2 - x_3, -x_2 + 2x_3) = \alpha\hat{A}\vec{x}$$

Условия линейности выполняются $\Rightarrow$ $\hat{A}$ – линейный оператор.

Найдем матрицу линейного оператора в каноническом базисе.

$\vec{e}_1$=(1,0,0); $\vec{e}_2$=(0,1,0); $\vec{e}_3$=(0,0,1)

$\mathbf{\widehat{A}}\vec{\mathrm{x}}\mathbf{=(}\ \mathrm{x}_{\mathbf{1}} + \mathbf{2}\mathrm{x}_{\mathbf{2}} - \mathbf{3}\mathrm{x}_{\mathbf{3}}\mathbf{,2}\mathrm{x}_{\mathbf{1}} + \mathbf{3}\mathrm{x}_{\mathbf{2}} - \mathrm{x}_{\mathbf{3}}\mathbf{,} - \mathrm{x}_{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\mathrm{x}_{\mathbf{3}}\mathbf{)}$

$\widehat{\mathrm{A}}\ \vec{e}_1 = (1,2,0)$

$\widehat{\mathrm{A}}\ \vec{e}_2 = (2,3,-1)$

$\widehat{\mathrm{A}}\ \vec{e}_3 = (-3,-1,2)$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

б) $\hat{B}\vec{x}=(x_1+2x_2-3x_3, 2x_1+3x_2-x_3, -x_2+2)$

$\hat{B}: R^3 \to R^3$, т.е $\hat{B}$ вектор из R^3 переводит в R^3.

Проверим линейность оператора $\hat{B}$:

$\hat{B}(\vec{x}+\vec{y}) = (x_1+y_1+2(x_2+y_2)-3(x_3+y_3), 2(x_1+y_1)+3(x_2+y_2)-(x_3+y_3), -(x_2+y_2)+2)$;

$\hat{B}\vec{x}+\hat{B}\vec{y} = (x_1+2x_2-3x_3, 2x_1+3x_2-x_3, -x_2+2)+(y_1+2y_2-3y_3, 2y_1+3y_2-y_3, y_2+2) = (x_1+y_1+2(x_2+y_2)-3(x_3+y_3), 2(x_1+y_1)+3(x_2+y_2)-(x_3+y_3), -(x_2+y_2)+4) \neq \hat{B}(\vec{x}+\vec{y})$

Условие линейности оператора не выполняется, => $\hat{B}$ не является линейным оператором.

c) $C\vec{x} = (x_1 + x_2 - x_3^2;\ 4x_2;\ \ 2x_2 - x_3^3)$

$\hat{C}$: $R^3 \to R^3$, оператор $C\vec{x} = (x_1 + 7x_2 - x_3^2;\ 4x_2;\ \ 2x_2 - x_3^3)$ вектор из R^3 переводит в вектор из R^3.

Проверим линейность оператора $\hat{C}$:

$$\hat{C}(\vec{x} + \vec{y}) = ((x_1 + y_1) + 7(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3)^2; 4(x_2 + y_2);\ 2(x_2 + y_2) -$$

$$-(x_3 + y_3)^3) = (x_1 + y_1 + 7x_2 + y7_2 - x_3^2 - 2x_3y_3 - y_3^2; 4x_2 + 4y_2;$$

$$2x_2 + 2y_2 - x_3^3 - 3x_3^2y_3 - 3x_3y_3^2 - y_3^3)$$

С другой стороны:

$$\hat{C}\vec{x} + \hat{C}\vec{y} = (x_1 + 7x_2 - x_3^2;\ 4x_2; 2x_2 - x_3^3) + (y_1 + 7y_2 - y_3^2;\ 4y_2; 2y_2 - y_3^3) =$$

$$= (x_1 + 7y_1 + x_2 + 7y_2 - x_3^2 - y_3^2; 4x_2 + 4y_2; 2x_2 + 2y_2 - x_3^3 - y_3^3) \Rightarrow$$

$\hat{C}(\vec{x} + \vec{y}) \neq \hat{C}(\vec{x}) + C(\vec{y})$.

Условие линейности оператора не выполняется $\Rightarrow \hat{C}$ не является линейным оператором.

3. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса

Пусть в линейном пространстве L заданы два базиса $S_1 = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ и $S_2 = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$ и $\hat{\boldsymbol{A}}: L \to L$ – линейный оператор. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Матрицы A и A'линейного оператора $\hat{A}: L \to L$, записанные в базисах S_1(старый базис) и S_2(новый базис) соответственно, связаны формулой:

$$\boldsymbol{A' = P^{-1}AP,}$$

где P - матрица перехода от старого базиса S_1 к новому базису S_2.

Утверждение. Определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

◀ $\det(P^{-1} \cdot A \cdot P) = \det P^{-1} \cdot \det A \cdot \det P = \det A,$ т. к. $\det P^{-1} \cdot \det P = 1$ ▶

Задача. Линейный оператор $\widehat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $S = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ имеет матрицу $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора в базисе $S' = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$, если $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\overrightarrow{f_3} = -2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$.

Решение: Выпишем матрицу перехода от старого базиса $S = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ к новому $S' = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$, записав координаты нового базиса в старом $\vec{f}_1 = (1; 0; -2)$, $\overrightarrow{f_2} = (-1; 1; 1)$, $\overrightarrow{f_3} = (-2; 2; 3)$ в столбцы матрицы:

$$P_{S\to S'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу $P^{-1}_{S\to S'}$:

$$P^{-1}_{S\to S'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A' = P_{S\to S'}^{-1} A P_{S\to S'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -7 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица оператора $\widehat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $S' = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$.

4.Действия над линейными операторами

Пусть L-линейное пространство. $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ линейные операторы: $L \rightarrow L, \alpha \epsilon \mathbb{R}$.

Определение.

- Суммой $\widehat{A}+\widehat{B}$ называется оператор, действующий по правилу:

$$(\widehat{A}+\widehat{B})\vec{x}=\widehat{A}\,\vec{x}+\widehat{B}\vec{x};$$

- Произведением $\widehat{A}\cdot\widehat{B}$ называется оператор, действующий по правилу:

$$(\widehat{A}\cdot\widehat{B})\,\vec{x}=\widehat{A}(\widehat{B}\,\vec{x});$$

- Произведением $\alpha\,\widehat{A}$ называется оператор, действующий по правилу:

$$(\alpha\,\widehat{A})\,\vec{x}=\alpha(\widehat{A}\,\vec{x}).$$

Теорема 4. Определенные таким образом операторы $\widehat{A}+\widehat{B}$; $\widehat{A}\cdot\widehat{B}$, $\alpha\,\widehat{A}$ являются линейными операторами.

Теорема 5. Пусть линейные операторы $\widehat{\mathrm{A}}$ и $\widehat{B}$ в конечномерном линейном пространстве L в базисе S имеют матрицы A и B соответственно. Тогда линейные операторы $\widehat{\mathrm{A}}+\widehat{B}$; $\widehat{\mathrm{A}}\cdot\widehat{B}$, $\alpha\widehat{\mathrm{A}}$ имеют матрицы

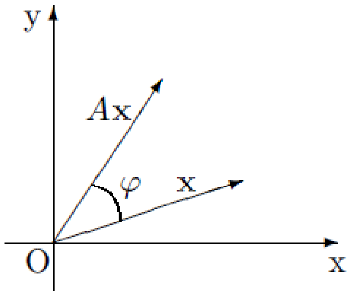
A+B, AB, αA соответственно.

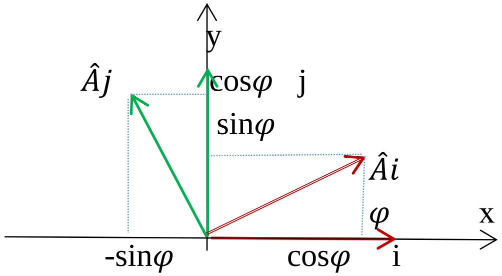
Задача. Вычислить: $\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}^n$

Решение. Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$ как матрицу линейного оператора – поворот на угол φ против часовой стрелки. Тогда $\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}^n$ - это матрица оператора поворота на угол φ против часовой стрелки n раз, то есть поворота на угол (nφ), а она равна $\begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & cos(n\varphi) \end{pmatrix}$ =>

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix}$$

Задача. Найти матрицу оператора $\widehat{\boldsymbol{A}}: V_2 \to V_2$ поворот на угол φ против часовой.





$\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{\imath} = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath}$

$\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{\jmath} = -\sin\varphi\,\vec{\imath} + \cos\varphi\,\vec{\jmath}$ A=$\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$- матрица линейного оператора – поворот на угол угол φ против часовой стрелки.

5. Обратный оператор.

Определение. Оператор $\widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}$ ***называется обратным*** к линейному оператору $\widehat{\boldsymbol{A}}$, действующему в пространстве **L**, если $\widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{A}}^{-1} = \widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}\widehat{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{I}}$,
где $\vec{\boldsymbol{I}}$-тождественный оператор ($\vec{I}\vec{x} = \vec{x}$).
Таким образом, $\widehat{\boldsymbol{A}}\left(\widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}\vec{\boldsymbol{x}}\right) = \widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}\left(\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{\boldsymbol{x}}\right) = \vec{\boldsymbol{I}}\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{x}} \;\; \forall\vec{x} \in L$
Если $\vec{y} = \widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x} \Rightarrow \widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}\vec{x} = \vec{y}$.

Теорема 6. Если $\widehat{\mathrm{A}}$ линейный оператор: $L\rightarrow L$ и $\widehat{\mathrm{A}}^{-1}$ существует, то $\widehat{\mathrm{A}}^{-1}$- линейный оператор и имеет матрицу A^{-1}.

Теорема ***(о прообразе нулевого вектора).*** Если линейный оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ имеет обратный, то из равенства $\hat{\boldsymbol{A}}\vec{x} = \vec{0}$ следует, что $\vec{x} = \vec{0}$.

◀Из $\hat{\boldsymbol{A}}\vec{x} = \vec{0}$ следует, что $\hat{\boldsymbol{A}}^{-\mathbf{1}}(\hat{\boldsymbol{A}}\vec{x}) = \hat{\boldsymbol{A}}^{-\mathbf{1}}\vec{0} = \vec{0}$.

Так как $\forall\vec{x} \in L$ $\hat{\boldsymbol{A}}^{-\mathbf{1}}\hat{\boldsymbol{A}}\vec{x} = \hat{\boldsymbol{I}}\vec{x} = \vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$. ▶

Определение. Линейный оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$: $L \to L$ называется ***взаимно однозначным***, если он два различных вектора $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ преобразует в различные векторы $\vec{y}_1 = \hat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_1$ и $\vec{y}_2 = \hat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_2$, . Другими словами, каждый вектор $\vec{y} \in L$ представляет собой образ единственного вектора $\vec{x} \in L$.

Теорема ***(об обратном операторе).*** Линейный оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$: $L \to L$ обратим тогда и только тогда, когда он взаимно однозначный.

Теорема 7 (критерий существования обратного оператора).

Пусть $\hat{\mathrm{A}}$ линейный оператор: $L\to L$, $\hat{A}^{-1}$ существует ⇔ det A≠ 0

Определение. Оператор, у которого существует обратный, называется ***обратимым***.

Примеры :

1) Нулевой оператор $\hat{\boldsymbol{O}}: L \to L$ не имеет обратного.

2) Тождественный оператор $\hat{\boldsymbol{I}}: L \to L$ имеет обратный, причем $\hat{\boldsymbol{I}}^{-1} = \hat{\boldsymbol{I}}$

3) Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}: V_3 \to V_3$ - гомотетия с коэффициентом k имеет обратный $\hat{\boldsymbol{A}}^{-1}$ - гомотетия с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

4) Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}: V_2 \to V_2$ - поворот на угол φ против часовой стрелки имеет обратный $\hat{\boldsymbol{A}}^{-1}: V_2 \to V_2$ - поворот на угол φ по часовой стрелки.

5) Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}: V_3 \to V_3$ $-$проектирование на ось OX не имеет обратного.

6. Ядро и образ линейного оператора, их свойства.

Определение. ***Образом линейного оператора*** $\widehat{\boldsymbol{A}}$ называется множество **Im** $\widehat{\boldsymbol{A}}$ всех векторов L, таких что, для любого $\vec{y} \in \text{Im}\,\widehat{A}\ \exists \vec{x} :\ \hat{A}(\vec{x}\,) = \vec{y}$.

Определение . ***Ядром линейного оператора*** $\widehat{\boldsymbol{A}}$ называется множество **Ker**$\widehat{\boldsymbol{A}}$ всех векторов L , таких что, для любого $\vec{x} \in \text{Ker}\hat{A}$, $\widehat{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{x}}\,) = \vec{\boldsymbol{0}}$**.**

Пусть A - матрица линейного оператора $\hat{A}$ в некотором базисе. Тогда Ker $\widehat{A}$ является решением однородной системы $A\vec{x} = \vec{0}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

или $\quad \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{O}$, где $O = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Теорема 8. Ядро и образ линейного оператора, действующего в L, являются линейными подпространствами пространства L.

◀ Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \operatorname{Ker} \widehat{\boldsymbol{A}} \Rightarrow \widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_1 = \widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_2 = \vec{0}$.

$\widehat{\boldsymbol{A}}(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) = \alpha\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_1 + \beta\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 \in \operatorname{Ker} \widehat{\boldsymbol{A}}$. Следовательно, $\operatorname{Ker} \widehat{\boldsymbol{A}}$ - линейное подпространство в L.

Пусть $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \operatorname{Im} \widehat{\boldsymbol{A}}$, тогда существуют прообразы этих векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L$, такие что $\vec{y}_1 = \widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_1$, $\vec{y}_2 = \widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_2$.

$\widehat{\boldsymbol{A}}(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) = \alpha\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_1 + \beta\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_2 = \alpha\vec{y}_1 + \beta\vec{y}_2 \in \operatorname{Im} \widehat{\boldsymbol{A}}$.

Следовательно, $\operatorname{Im} \widehat{\boldsymbol{A}}$ - линейное подпространство в L ▶

Определение. ***Рангом*** $Rang\,\boldsymbol{\hat{A}}$ линейного оператора $\boldsymbol{\hat{A}}$ называется размерность образа оператора: $$Rang\,\boldsymbol{\hat{A}} = \dim \operatorname{Im} \boldsymbol{\hat{A}}.$$

Определение. ***Дефектом*** $Defect\,\boldsymbol{\hat{A}}$ линейного оператора $\boldsymbol{\hat{A}}$ называется размерность ядра оператора: $$Defect\,\boldsymbol{\hat{A}} = \dim \operatorname{Ker} \boldsymbol{\hat{A}}.$$

Теорема 9. Ранг линейного оператора, действующего в линейном пространстве L совпадает с рангом его матрицы в каком либо базисе.

Утверждение. Ранг и дефект линейного оператора не зависят от выбора базиса.

Теорема 10. ***(о размерности ядра и образа оператора).*** Если $\boldsymbol{\hat{A}} : L \to L$ - линейный оператор, то сумма размерностей образа и ядра оператора $\boldsymbol{\hat{A}}$ равна размерности пространства L:

$$\boldsymbol{Rang\,\hat{A} + Defect\,\hat{A} = \dim L.}$$

Следствие. Если $\operatorname{Ker} \boldsymbol{\hat{A}} = \{\vec{0}\}$, то $\operatorname{Im} \boldsymbol{\hat{A}} = L$ и наоборот.

Теорема 11. ***(критерии обратимости линейного оператора)***

1) Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L, обратим тогда и только тогда, когда его матрица в каком-либо базисе невырожденная (det A$\neq$ 0).

2) Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L, обратим тогда и только тогда, когда его образ совпадает со всем пространством L. $\mathrm{Im}\hat{A} = L$

3) Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L, обратим тогда и только тогда, когда его ядро тривиально, т.е.

$\mathrm{Ker}\hat{A} = \{\vec{0}\}$.

Следствие. Для того чтобы оператор $\widehat{\boldsymbol{A}}$ имел обратный $\widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}$ необходимо и достаточно, чтобы $Rang\ \widehat{\boldsymbol{A}} = \dim L$.

7.Собственные векторы и собственные значения.

Определение. Ненулевой вектор $\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ в линейном пространстве L называют ***собственным вектором линейного оператора*** $\hat{\mathbf{A}}$***:*** $L \to L$, отвечающим ***собственному значению*** $\boldsymbol{\lambda}$***,*** $(\lambda \in R)$, если $\hat{A}\vec{a} = \lambda\vec{a}$.

Определение. Линейный оператор $\hat{A}$: L⟶ L называется **оператором простого типа (диагонализируемый)**, если существует базис линейного пространства L, состоящий из собственных векторов $\hat{A}$.

Теорема. Собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, соответствующие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

Теорема. (достаточное условие оператора простого типа) Пусть dim L=n. Если $\hat{A}: L \to L$ имеет n попарно различных собственных значений, то он является оператором простого типа.

Пример 1.

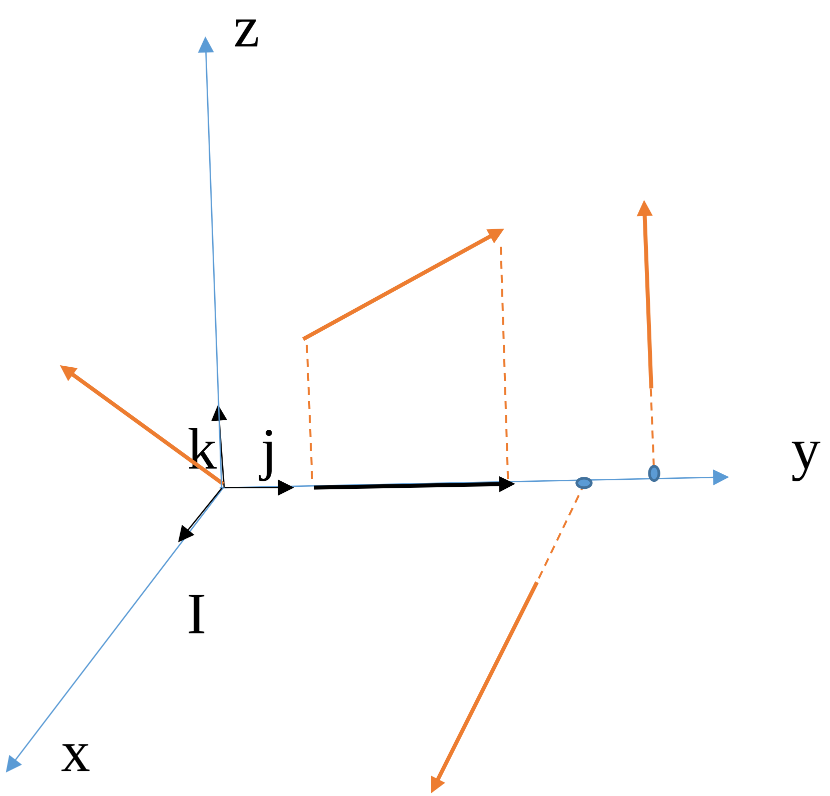
Оператор в пространстве V_3: $\widehat{\mathbf{A}}$ **- проекция на координатную ось** $\boldsymbol{Oy}$.

Подействуем линейным оператором на базисные векторы $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

$$\hat{A}\vec{\imath} = \vec{0} = (0,0,0),$$

$$\hat{A}\vec{\jmath} = \vec{\jmath} = (0,1,0),$$

$$\hat{A}\vec{k} = \vec{0} = (0,0,0).$$



Запишем матрицу оператора $\hat{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем образ вектора $\vec{a} = (-1,5,2)$:

$$\hat{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из геометрических соображений видно, что под действием линейного оператора в $\vec{0}$ переходят все векторы, перпендикулярные оси OY, то есть параллельные плоскости Oxz, следовательно, $\mathrm{Ker}\,\hat{A} = \{\alpha\vec{i} + \beta\vec{k}\}$.

Образом оператора $\hat{A}$ является ось Oy: $\mathrm{Im}\,\hat{A} = \{\gamma\vec{j}\}$, $\mathrm{Defect}\,\hat{A} = 2$, $\mathrm{Rang}\,\hat{A} = 1$.

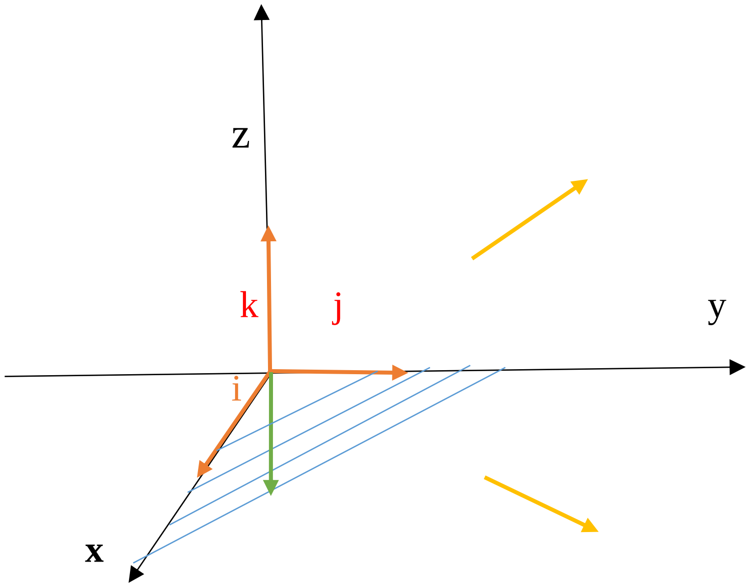
По всем трем критериям линейный оператор необратим:

1) $\det A = 0$; 2) $\mathrm{Im}\,\hat{A} \neq V_3$; 3) $\mathrm{Ker}\,\hat{A} \neq \{\vec{0}\}$.

Матрица в каноническом базисе имеет диагональный вид, следовательно это линейный оператор простого типа. $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$; $\lambda_2 = 1$; , собственный базис

$\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Пример 2. Оператор в пространстве V_3: $\widehat{\mathbf{A}}$ – **зеркальное отражение относительно плоскости XOY.**



Подействуем линейным оператором на базисные векторы $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

$\hat{A}\vec{\imath} = \vec{\imath} = (1,0,0)$, $\hat{A}\vec{\jmath} = \vec{\jmath} = (0,1,0)$, $\hat{A}\vec{k} = -\vec{k} = (0,0,-1)$.

Запишем матрицу оператора $\hat{A}$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдем образ вектора $\vec{a} = (2, -4, -3)$:

$$\hat{A}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Из геометрических соображений видно, что под действием данного линейного оператора в нулевой элемент переходит только $\vec{0}$, следовательно, $\operatorname{Ker} \hat{A} = \{\vec{0}\}$. Тогда образом $\hat{A}$ является все пространство V_3: $\operatorname{Im} \hat{A} = V_3$. Данные выводы подтверждаются тем фактом, что $\operatorname{rang} A = 3$.

Данный линейный оператор обратим:

1)$\det A \neq 0$; 2) $\operatorname{Im} \hat{A} = V_3$; 3) $\operatorname{Ker} \hat{A} = \{\vec{0}\}$.

Матрица в каноническом базисе имеет диагональный вид, следовательно это линейный оператор простого типа. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = -1$; , собственный базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Пример 3.

В пространстве V_3 оператор $\hat{A}$ задан формулой:

$$\hat{A}\vec{x} = [\vec{x}, \vec{a}]$$ - векторное произведение, где $\vec{a} = (1; -2; 3)$.

а) Доказать, что $\hat{A}$- линейный оператор;

б) Найти матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

c) Найти образ вектора $\vec{c} = (1; 2; -1)$

d) Найти ядро и образ оператора $\hat{A}$**.**

e) Является ли оператор $\hat{A}$ обратимым? Если да, описать его действие.

f) Найти собственные значения и собственные векторы

Решение:

a) $\hat{A}(\vec{x} + \vec{y}) = [\vec{x} + \vec{y}, \vec{a}] = [\vec{x}, \vec{a}] + [\vec{y}, \vec{a}] = \hat{A}(\vec{x}) + \hat{A}(\vec{y})$,

$$\hat{A}(\alpha\vec{x}) = [\alpha\vec{x}, \vec{a}] = \alpha[\vec{x}, \vec{a}] = \alpha\hat{A}\vec{x}.$$

Свойства линейности выполняется, следовательно $\hat{A}$ – линейный оператор.

$$\text{б) } \hat{A}\vec{i} = [\vec{i}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -\overrightarrow{3j} - 2\vec{k} = (0; -3; -2)$$

$$\hat{A}\vec{j} = [\vec{j}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - \vec{k} = (3; 0; -1)$$

$$\hat{A}\vec{k} = [k, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{j} = (2; 1; 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Найдем образ вектора $\vec{c} = (1; 2; 3)$:

$$\vec{y} = \hat{A}\vec{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

d) $\operatorname{Ker} \hat{A} = \{\beta\vec{a}\}$ – векторы, коллинеарные $\vec{a}$, (следует из свойств векторного произведения),

$\operatorname{Im} \hat{A}$ – векторы, перпендикулярные $\vec{a}$ (плоскость, для которой $\vec{a}$ – нормаль)

$\operatorname{Defect} \hat{A} = 1$, $\operatorname{Rang} \hat{A} = 2$.

e) По всем трем критериям линейный оператор необратим:

1) $\det A = 0$; 2) $\operatorname{Im} \hat{A} \neq V_3$; 3) $\operatorname{Ker} \hat{A} \neq \{\vec{0}\}$.

Найдем собственные векторы и собственные значения.

Надо найти такие векторы $\vec{b}$, чтобы $[\vec{b},\vec{a}]= \lambda\vec{b}$. Из свойств векторного произведения следует, что это возможно только в одном случае, когда $\vec{b} = \beta\vec{a}$; Тогда $[\vec{b},\vec{a}]= [\beta\vec{a},\vec{a}]= \vec{0} = 0\vec{b}$; и $\lambda = 0$.

Итак , собственные векторы : $\vec{b} = \beta\vec{a}$ с собственным значением $\lambda = 0$. Нет базиса из собственных вектором, следовательно данный линейный оператор не является оператором простого типа

Операторы в пространствах многочленов

Пример 4.

В пространстве P_2 многочленов степени не выше 2 задан оператор:

$$\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{t}\boldsymbol{p}'(\boldsymbol{t}) + \mathbf{2}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})$$

a) Показать линейность оператора $\hat{A}$.

b) Найти матрицу линейного оператора $\hat{A}$ в каноническом базисе пространства P_2.

c) Найти образ многочлена $p(t) = 2t^2 - 3t + 1$.

d) Найти ядро линейного оператора $\hat{A}$.

e) Существует ли обратный оператор?

f) Найти собственные векторы и собственные значения.

Решение:

a) Проверим линейность оператора:

$$\hat{A}\big(p_1(t) + p_2(t)\big) = t\big(p_1'(t) + p_2'(t)\big) + 2\big(p_1(t) + p_2(t)\big) =$$

$$= \big(tp_1'(t) + 2p_1(t)\big) + \big(tp_2'(t) + 2p_2(t)\big) = \hat{A}\big(p_1(t)\big) + \hat{A}(p_2(t)).$$

$$\hat{A}\big(\alpha p(t)\big) = t\big(\alpha p'(t)\big) + 2\big(\alpha p(t)\big) = \alpha(tp'(t) + 2p(t)) = \alpha\hat{A}(p(t)).$$

Условие линейности выполняется.

b) Найдем матрицу $\hat{A}$ в каноническом базисе: $\vec{e}_0 = 1, \vec{e}_1 = t, \vec{e}_2 = t^2$.

$\hat{A}\vec{e}_0 = t \cdot (1)' + 2 = 2 = (2{,}0{,}0)$,

$\hat{A}\vec{e}_1 = t \cdot (t)' + 2 \cdot t = 3t = (0{,}3{,}0)$,

$\hat{A}\vec{e}_2 = t \cdot (t^2)' + 2 \cdot t^2 = 4t^2 = (0{,}0{,}4)$.

Чтобы получить матрицу линейного оператора, записываем координаты образов базисных векторов по столбцам:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

c) Чтобы найти образ многочлена $p(t)$, запишем его в координатной форме

$$p(t) = 2t^2 - 3t + 1 = 1\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = (1, -3{,}2).$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{A}p(t) = 2 - 9t + 8t^2.$$

d) Чтобы найти ядро $\hat{A}$, решим однородную систему уравнений: $AX = O$:

$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rang} A = 3 \Rightarrow$ система имеет единственное тривиальное

$$\text{решение: } X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = (0,0,0) \Rightarrow \operatorname{Ker} \hat{A} = \{\vec{0}\}.$$

e) $\operatorname{Ker} \hat{A} = \{\vec{0}\} \Rightarrow$ существует $\hat{A}^{-1}$, оператор обратим.

Матрица данного линейного оператора имеет диагональный вид, следовательно это оператор простого типа, канонический базис $\vec{e}_0 = 1$, $\vec{e}_1 = t$, $\vec{e}_2 = t^2$ является собственным базисом.Собственные значения стоят на главной диагонале: 2, 3,4.

Пример 5.

Оператор Â действует в пространстве P_2 многочленов степени не выше второй:

$$\boldsymbol{\widehat{A}p(t) = p'(t-1) + 2p(t)}$$

a) Показать линейность оператора.

b) Найти его матрицу в каноническом базисе пространства P_2.

c) Найти образ многочлена $p(t) = t^2 + 2t - 3$.

d) Найти ядро линейного оператора Â.

e) Существует ли обратный оператор?

Решение:

a)Проверим линейность оператора:

$$\hat{A}\big(p_1(t) + p_2(t)\big) = \big(p_1(t-1) + p_2(t-1)\big)' + 2\big(p_1(t) + p_2(t)\big) =$$

$$= p_1'(t-1) + 2p_1(t) + p_2'(t-1) + 2p_2(t) = \hat{A}p_1(t) + \hat{A}p_2(t).$$

$$\hat{A}(\alpha p(t) = \alpha p'(t-1) + 2\alpha p(t)) = \alpha(p(t-1) + 2p(t)) = \alpha\hat{A}(p(t)).$$

Условие линейности выполняется.

$$\boldsymbol{\hat{A}p(t) = p'(t-1) + 2p(t)}$$

b) Найдем матрицу оператора в каноническом базисе пространства P_2:

$$\vec{e}_0 = 1, \vec{e}_1 = t, \vec{e}_2 = t^2.$$

$\hat{A}\vec{e}_0 = 1' + 2 = 2 = (2,0,0)$

$\hat{A}\vec{e}_1 = (t-1)' + 2t = 1 + 2t = 0 = (1,2,0)$

$\hat{A}\vec{e}_2 = ((t-1)^2)' + 2t^2 = 2(t-1) + 2t^2 = 2t^2 + 2t - 2 = (-2,2,2).$

Чтобы получить матрицу линейного оператора, записываем координаты образов базисных векторов в матицу по столбцам.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Чтобы найти образ вектора запишем его в координатной форме.

$$p(t) = t^2 + 2t - 3 = -3\vec{e}_0 + 2\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 = (-3,2,1).$$

$$\hat{A}p(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2t^2 + 6t - 6.$$

d) Чтобы найти ядро Â, решим однородную систему линейных уравнений $AX = O$:

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rang} A = 3$, система имеет только тривиальное

решение : $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{Ker} \hat{A} = \{\overline{0}\}.$

$Im\hat{A} = P_{2.}$

e) Обратный оператор существует по всем трем критериям:

1) $\det A \neq 0$, 2) $\operatorname{Ker} \hat{A} = \{\overline{0}\}$., 3) $Im\hat{A} = P_{2.}$

Найдем собственные значения и собственные векторы.

$\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 = 0;\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

Решим систему $(A + 2E)X = O$.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; rang=2. X=$\begin{pmatrix} C \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C$;

Существует всего один линейно-независимый собственный вектор; нет базиса из собственных векторов. Данный линейный оператор не является оператором простого типа.

Пример 6.

$\widehat{\mathrm{A}}\,(\mathrm{p}(\mathrm{t})) = (\mathrm{t}+2)\mathrm{p}''(\mathrm{t}) + \mathrm{p}'(\mathrm{t})$ в пространстве P_2 многочленов степени не выше 2.

Найдем матрицу $\hat{A}$ в каноническом базисе:

$\hat{A}\overline{e}_0 = (t+2)\cdot(1)'' + 0 = (0,0,0);$

$\hat{A}\overline{e}_1 = (t+2)\cdot(t)'' + t' = 1 = (1,0,0);$

$\hat{A}\overline{e}_2 = (t+2)\cdot(t^2)'' + (t^2)' = 2(t+2) + 2t = (4,4,0);$

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

det A= 0 => $\widehat{\mathrm{A}}^{-1}$ не существует

Чтобы найти ядро $\hat{A}$, решим однородную систему уравнений:

AX=O; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; rang A=2; c=b=0; a $-$любое; X=(a,0,0)= a; =>

Ker$\hat{A} = \{p(t) = a\}$

det A=0 => $\hat{A}^{-1}$ не существует.

Найдем собственные векторы и собственные значения.

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$**.** Составим характерестическое уравнение.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 4 \\ 0 & -\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0; \text{-}\ \lambda^3 = 0;$$

$$\lambda_2 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Найдем собственные векторы. Решим систему $(A)X = O$.

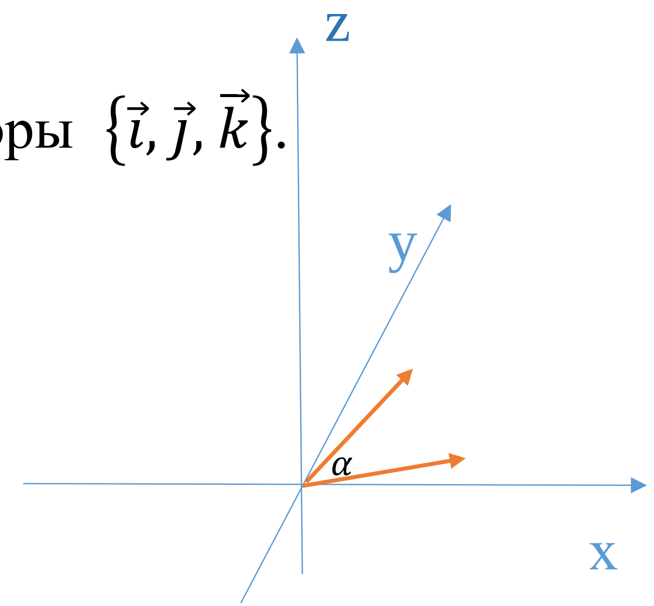
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, решим систему методом Гаусса.

$\operatorname{rang} A = 2;$ $x_3 = 0; x_2 = 0; x_1 = c.$ $X_{oo} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} => \vec{x} = (c, 0,0)$ =>

собственные векторы: $\{p(t) = c\}$. Мы видем , что множество собственных векторов совпало с ядром линейного оператора. Можем виделить только один линейно-независимый собственный вектор : $\vec{e}_0 = 1.$ Таким образом у данного линейного оператора нет базиса из собственных векторов и он не является оператором простого типа.

Пример 7.

Рассмотрим линейный оператор $\hat{A}$ в V_3-поворот вокруг оси OZ на угол α против часовой стрелки.



Подействуем линейным оператором на базисные векторы $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

$$\hat{A}\vec{i} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$$

$$\hat{A}\vec{j} = -\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$$

$$\hat{A}\vec{k} = 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 1\cdot\vec{k}$$

Координаты образов базисных векторов надо записать по столбцам:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – матрица поворота вокруг оси Oz на угол α против часовой стрелки

$$A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sin\,\alpha & 0 \\ sin\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Из геометрических соображений видно, что под действием линейного оператора $\widehat{A}$ - поворот вокруг оси OZ на угол α, в нулевой элемент переходит только $\vec{0}$, следовательно, $\operatorname{Ker}\hat{A}=\{\vec{0}\}$. Тогда образом $\hat{A}$ является все пространство V_3: $\operatorname{Im}\hat{A}=V_3$. Данные выводы подтверждаются и тем фактом, что $\operatorname{rang}A=3$, и $\det A=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1\neq 0$.

Обратный оператор существует - поворот вокруг оси OZ на угол α по часовой стрелки.

Найдем собственные векторы и собственные значения.

<u>1 случай</u> Если $\boldsymbol{\alpha=\frac{\pi}{6}}$, то $A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

При повороте на угол $\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{6}}$ вокруг оси OZ , из геометрических соображений можно сделать вывод, что под действием данного линейного оператора только векторы , параллельные оси OZ переходят в коллинеарные себе векторы, так как при данном повороте они остаются на месте и переходят сами в себя, то есть собственные векторы $\overline{a}$=c$\overline{k}$; $\hat{A}\overline{a}=\overline{a}$; $\lambda = 1$ - собственное значение, соответствующее собственному вектору $\overline{k}$. В данном случае $\hat{A}$ не является оператором простого типа, так как не имеет базиса из собственных векторов.

Рассмотрим поворот на произвольный угол α вокруг оси OZ

Составим характерестическое уравнение: $\begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & -sin\,\alpha & 0 \\ sin\,\alpha & \cos\alpha - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$=0

$(1-\lambda)((\cos\ \alpha - \lambda)^2 + \ (sin\ \alpha)^2)$=0; $(1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1)$=0

$\boldsymbol{\lambda_1}$**=1;** Найдем остальные корни уравнения.

D=4 $(\cos\alpha)^2 - 4 \le 0$; действительные корни будут только при $D = 0$;
$\cos\alpha = \pm1$; т. е. $\alpha = \pi k$; $k\epsilon Z$

При $\boldsymbol{\alpha = \pi}$ $\boldsymbol{\lambda_{2,3}}$**= -1**;

А при $\boldsymbol{\alpha = 2\pi}$ $\boldsymbol{\lambda_1}$=$\boldsymbol{\lambda_2 = \lambda_3}$**=1**;

Найдем собственные векторы.

<u>2 случай</u>. $\boldsymbol{\alpha = \pi}$;

Удобнее взять собственные значения в следующем порядке:

Пусть $\boldsymbol{\lambda_{1,2}}$**= -1;** $\boldsymbol{\lambda_3}$**=1**

При $\boldsymbol{\lambda_{1,2}}$**= -1**; составим уравнение (A+E)$\overline{X}$=$\overline{O}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \; X^1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

При $\boldsymbol{\lambda_3}$**=1;** составим уравнение (A-E)$\overline{X}$=$\overline{O}$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ X^2 = c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Таким образом в качестве базиса из собственных векторов можно выбрать $\{\vec{\mathrm{i}}, \vec{\mathrm{j}}, \vec{\mathrm{k}}\}$.

Матрица оператора в базисе из собственных векторов: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. В данном случае $\hat{A}$- оператор простого типа, так как имеет базис из собственных векторов.

<u>3 случай</u>. $\boldsymbol{\alpha = 2\pi}$

$\boldsymbol{\lambda_1}$=$\boldsymbol{\lambda_2} = \boldsymbol{\lambda_3}$**=1**;

Действие оператора поворота на угол 2π совпадает с действием тождественного оператора $\hat{I}$; $\hat{I}\overline{x} = \overline{x}$. В качестве базиса из собственных векторов можно выбрать канонический базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$;

Аналитическое решение это подтверждает.

$(A\text{-}E)\overline{X}=\overline{O}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X^1 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Матрица в базисе из собственных векторов: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. В данном случае $\hat{A}$-оператор простого типа.