

Семинар 11.

Знакоопределенные квадратичные формы.

Определение. Квадратичная форма называется *положительно определенной*, если $\forall \vec{x} \neq \vec{0}: \varphi(\vec{x}) > 0$.

Определение. Квадратичная форма называется *отрицательно определенной*, если $\forall \vec{x} \neq \vec{0}: \varphi(\vec{x}) < 0$.

Если квадратичная форма не является положительно или отрицательно определенной, то говорят, что она *общего вида*, или *знакопеременная*.

Исследование квадратичной формы на знакоопределенность

1 способ - по каноническому виду:

Теорема.

- 1) Квадратичная форма положительно определена $\Leftrightarrow$ она невырожденная и все коэффициенты в ее каноническом виде положительные:
($r = r_+ = \dim V$).
- 2) Квадратичная форма отрицательно определена $\Leftrightarrow$ она невырожденная и все коэффициенты в ее каноническом виде отрицательные:
($r = r_- = \dim V$).

2 способ - по критерию Сильвестра:

- 1) Квадратичная форма положительно определена $\Leftrightarrow$ все главные (угловые) миноры матрицы квадратичной формы положительные.
- 2) Квадратичная форма отрицательно определена $\Leftrightarrow$ знаки главных миноров матрицы квадратичной формы чередуются, начиная с минуса.

Критерий Сильвестра для трехмерного пространства:

$$1) \quad \begin{array}{l} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \Leftrightarrow \text{квадратичная форма положительно определена;} \\ \Delta_3 > 0 \end{array}$$

$$2) \quad \begin{array}{l} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 > 0 \Leftrightarrow \text{квадратичная форма отрицательно определена;} \\ \Delta_3 < 0 \end{array}$$

3) во всех остальных случаях квадратичная форма знакопеременная, или общего вида.

Одним из методов приведения квадратичной формы к каноническому виду является **метод Лагранжа** (метод выделения полных квадратов). В стандартном случае метод Лагранжа состоит в последовательном выделении полных квадратов сначала в группе слагаемых, содержащих переменную x_1 , затем содержащих x_2 и т.д.

Примеры. Квадратичные формы от трех переменных.

1. $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ положительно определена.
2. $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$ неотрицательно определена, вырожденная.
3. $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$ знакопеременная.
4. $\varphi(\vec{x}) = x_1 x_2$ знакопеременная, вырожденная.

Задача №1

Привести квадратичную форму

$$\varphi(\vec{x}) = -4x_1^2 - 4x_2^2 - 18x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$$

к каноническому виду методом Лагранжа и указать соответствующее преобразование координат, осуществляющее такое приведение.

Найти положительный и отрицательный индексы, ранг квадратичной формы. Исследовать квадратичную форму на знакоопределённость двумя способами: по каноническому виду и по критерию Сильвестра.

Применим метод Лагранжа.

$$\varphi(\vec{x}) = -(4x_1^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3) - 4x_2^2 - 18x_3^2 - 8x_2x_3 =$$

$$\begin{aligned}
&= -((2x_1)^2 + 2 \cdot 2x_1x_2 - 2 \cdot 2x_1x_3 + x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_2x_3) \\
&\quad + (x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_2x_3) - 4x_2^2 - 18x_3^2 - 8x_2x_3 \\
&= -(2x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - 3x_2^2 - 14x_3^2 - 12x_2x_3 = \\
&= -(2x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - 3(x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2) + 12x_3^2 - 14x_3^2 = \\
&= -(2x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - 3(x_2 + 2x_3)^2 - 2x_3^2 = -y_1^2 - 3y_2^2 - 2y_3^2,
\end{aligned}$$

где $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ – преобразование координат.

Если P - матрица перехода к новому базису, то $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

Поэтому $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найдём P : $\det P = 2$ и

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Или выразим переменные x_i через y_i .

Следовательно, формулы преобразования координат имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}.$$

Итак, канонический вид квадратичной формы $\varphi(\vec{x}) = -y_1^2 - 3y_2^2 - 2y_3^2$.

По каноническому виду определяем ранг квадратичной формы – количество квадратов в каноническом виде, положительный индекс – количество квадратов с положительными коэффициентами, отрицательный индекс – количество квадратов с отрицательными коэффициентами:

$$r = 3, i_+ = 0, i_- = 3.$$

Исследуем на знакоопределённость по каноническому виду:

$$i_- = 3 = \dim \mathbb{L} = 3,$$

значит квадратичная форма является отрицательно определенной.

Исследуем на знакоопределённость с помощью критерия Сильвестра.

Выпишем матрицу данной квадратичной формы

$$\varphi(\vec{x}) = -4x_1^2 - 4x_2^2 - 18x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & -18 \end{pmatrix}$$

и вычислим главные миноры матрицы

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -4, \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 12, \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & -18 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -9 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -13 \end{vmatrix} = -24 < 0. \end{aligned}$$

Знаки главных миноров $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$, по критерию Сильвестра это означает, что квадратичная форма является отрицательно определенной. Задача решена.

Задача № 2 В пространстве геометрических векторов $\mathbb{V}_3$ дана квадратичная форма $\varphi(\vec{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$. Привести её к каноническому виду и записать соответствующее преобразование координат. Определить ранг и индексы инерции формы. Определить, какая поверхность определяется уравнением $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1$.

Решение. В данной квадратичной форме отсутствуют квадраты переменных, поэтому метод Лагранжа не применим.

Перейдём к новым координатам

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2, \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

тогда квадратичная форма перейдёт в квадратичную форму

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) &= (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + (y_1 + y_2)y_3 + (y_1 - y_2)y_3 = \\ &= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 = [\text{выделим полный квадрат}] = \\ &= (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2 = \\ &= \left[\text{перейдём к новым координатам} \begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \right] = \\ &= z_1^2 - z_2^2 - z_3^2. \end{aligned}$$

Это канонический вид квадратичной формы. Преобразование координат

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_2 = z_1 + z_2 - z_3. \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

Определим ранг и индексы инерции квадратичной формы по её каноническому виду и исследуем квадратичную форму на знакоопределённость:

$$r = 3,$$

$$i_+ = 1 \neq \dim \mathbb{V}_3,$$

$$i_- = 2 \neq \dim \mathbb{V}_3,$$

Исследуем на знакоопределённость с помощью критерия Сильвестра.

Выпишем матрицу данной квадратичной формы

$$\varphi(\vec{x}) = -4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

и вычислим главные миноры матрицы

$$\Delta_1 = 0$$

По критерию Сильвестра это означает, что квадратичная форма не является знакоопределённой.

Задача решена.

Теперь разберёмся, какую поверхность второго рода определяет уравнение $\varphi(\vec{x}) = 1$.

Для удобства переобозначим координаты на привычные для геометрического случая

$$z_1 = x, z_2 = y, z_3 = z,$$

тогда уравнение примет вид $x^2 - y^2 - z^2 = 1$.

Это уравнение определяет в геометрическом пространстве двуполостный гиперболоид.

Задача №3 При каком значении параметра a квадратичная форма

$$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2ax_2x_3 - 3ax_3^2$$
положительно определена?

Решение: Выпишем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & a & -3a \end{pmatrix}$$

и исследуем ее по критерию Сильвестра. Вычислим главные миноры:

$$\Delta_1 = 1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a \\ 0 & a & -3a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & -3a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & -3a \end{vmatrix} = -3a - a^2.$$

Согласно критерию Сильвестра, квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры положительны. В нашем случае минор

$$\Delta_3 = -3a - a^2 > 0 \Leftrightarrow a(a + 3) < 0 \Leftrightarrow a \in (-3; 0)$$

Ответ: квадратичная форма положительно определена при

$$a \in (-3; 0).$$

4. Исследовать квадратичную форму на знакоопределенность в зависимости от параметра a .

$$\varphi(\vec{x}) = (a + 1)x_1^2 + 2(a + 1)x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6ax_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$$

$$A = \begin{pmatrix} a + 1 & a + 1 & -1 \\ a + 1 & 6a & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Исследуем на положительную определенность.

$$M_1 = a + 1 > 0 \text{ при } a > -1,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} a + 1 & a + 1 \\ a + 1 & 6a \end{vmatrix} = 6a^2 + 6a - (a^2 + 2a + 1) = 5a^2 + 4a - 1,$$

$$M_2 > 0 \text{ при } \begin{cases} a < -1 \\ a > \frac{1}{5} \end{cases},$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} a + 1 & a + 1 & -1 \\ 0 & 5a - 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (5a - 1) \begin{vmatrix} a + 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (5a - 1)a,$$

$$M_3 > 0 \text{ при } \begin{cases} a < 0 \\ a > \frac{1}{5} \end{cases}.$$

Следовательно, квадратичная форма положительно определена при $a > \frac{1}{5}$.

Исследуем на отрицательную определенность.

$$M_1 = a + 1 < 0 \text{ при } a < -1,$$

$$M_2 > 0 \text{ при } \begin{cases} a < -1 \\ a > \frac{1}{5} \end{cases},$$

$$M_3 < 0 \text{ при } 0 < a < \frac{1}{5}.$$

Следовательно, квадратичная форма ни при каком значении параметра a не может быть отрицательно определенной.

Задача №4

Исследовать тип поверхности, заданной уравнением

$$4x_1^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 - \frac{3}{4}x_2^2 - 4x_2x_3 + 2ax_3^2 = 1$$

в зависимости от значения параметра a .

Решение. Приведём квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа

$$\begin{aligned} & 4x_1^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 - \frac{3}{4}x_2^2 - 4x_2x_3 + 2ax_3^2 = \\ & = 4\left(x_1^2 + \frac{1}{2}x_1x_2 - 2x_1x_3\right) - \frac{3}{4}x_2^2 - 4x_2x_3 + 2ax_3^2 = \\ & = 4\left(x_1^2 + 2x_1\left(\frac{1}{4}x_2 - x_3\right) + \left(\frac{1}{4}x_2 - x_3\right)^2\right) - \frac{1}{4}x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_3^2 - \\ & \quad - \frac{3}{4}x_2^2 - 4x_2x_3 + 2ax_3^2 = \\ & = 4\left(x_1 + \frac{1}{4}x_2 - x_3\right)^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - 4x_3^2 + 2ax_3^2 = \\ & = 4\left(x_1 + \frac{1}{4}x_2 - x_3\right)^2 - (x_2 + x_3)^2 - 3x_3^2 + 2ax_3^2 = \\ & = 4\left(x_1 + \frac{1}{4}x_2 - x_3\right)^2 - (x_2 + x_3)^2 + (2a - 3)x_3^2 \end{aligned}$$

Введём новые координаты

$$\begin{cases} x = x_1 + \frac{1}{4}x_2 - x_3 \\ y = x_2 + x_3 \\ z = x_3 \end{cases},$$

тогда уравнение поверхности второго порядка примет вид

$$4x^2 - y^2 + (2a - 3)z^2 = 1.$$

Заметим, что канонический вид зависит от способа приведения квадратичной формы к такому виду. Но важным является факт, что остаются неизменными характеристики квадратичной формы, а именно ранг – количество квадратов

в каноническом виде, положительный индекс – количество квадратов с плюсом, и отрицательный индекс – количество квадратов с минусом.

Продолжим исследование типа поверхности в зависимости от характеристик формы.

1) Если $2a - 3 < 0 \Rightarrow$ можно обозначить $2a - 3 = -\beta^2, \beta \neq 0$, тогда уравнение поверхности примет вид

$$4x^2 - y^2 - \beta^2 z^2 = 1$$

и это уравнение задаёт в геометрическом пространстве двуполостный гиперболоид.

2) Если $2a - 3 = 0 \Rightarrow$ уравнение примет вид

$$4x^2 - y^2 = 1$$

и будет определять цилиндрическую поверхность (а именно гиперболическую)

3) Если $2a - 3 > 0 \Rightarrow$ можно обозначить $2a - 3 = \beta^2, \beta \neq 0$, тогда уравнение примет вид

$$4x^2 - y^2 + \beta^2 z^2 = 1$$

и будет задавать в пространстве однополостный гиперболоид.

Задача полностью решена.

Задачи для самостоятельного решения:

1. В зависимости от значений параметра a исследовать тип поверхности, заданной уравнением

$$x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 5ax_3^2 = 1$$

2. Исследовать квадратичную форму на знакоопределённость в зависимости от значения параметра a

$$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 5x_2^2 + 2x_2x_3 + a \cdot x_3^2.$$

3. Задача типового расчёта 2.12.