Семинар 14.

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

Определение. Два ненулевых вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю: $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow (\vec{x}, \vec{y}) = 0$.

Определение. Вектор называется *нормированным (единичным)*, если его длина равна единице: $|\vec{x}| = 1$.

Определение. Базис $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$называется *ортонормированным*, если векторы базиса нормированы и попарно ортогональны, то есть:

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq j, \\ 1 \text{ при } i = j. \end{cases}$$

Процесс ортогонализации позволяет построить из произвольной линейно независимой системы векторов $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ ортонормированную систему ненулевых векторов $\{\vec{h}_1, \ldots, \vec{h}_n\}$ и состоит в следующем.

Полагаем $\vec{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{1}} = \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}}$.

Последующие векторы $\vec{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \vec{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{n}}$ находятся из рекуррентных формул

$$\vec{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{k}} = \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}} - \sum_{\boldsymbol{i}=\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}} \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{ki}} \vec{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{i}}.$$

Коэффициенты α_{ki} однозначно определяются условием ортогональности вектора $\vec{g}_k$ векторам $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_{k-1}$:

$$\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{ki}} = \frac{(\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{k}}, \vec{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{i}})}{(\vec{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{i}})}.$$

Таким образом, получаем ортогональный базис $\{\vec{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \vec{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{n}}\}$.

Нормируя векторы $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n$, получаем ортонормированный базис $\{\vec{\boldsymbol{h}}_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \vec{\boldsymbol{h}}_{\boldsymbol{n}}\}$, где $\vec{\boldsymbol{h}}_{\boldsymbol{i}} = \frac{\vec{g}_i}{|\vec{g}_i|}, \boldsymbol{i} = \boldsymbol{1} \ldots \boldsymbol{n}$.

Задача 1.

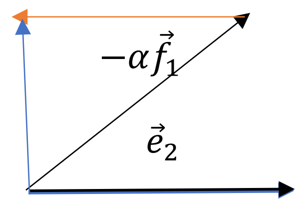
Дана матрица Грама скалярного произведения $G = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Ортогонализовать базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Сделать проверку с помощью матрицы перехода.

Решение:

Ортогонализуем базис $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ методом Грама-Шмидта.

$$\vec{f}_2 = \vec{e}_2 - \alpha \vec{f}_1$$



$\vec{f}_1 = \vec{e}_1$

Строим ортобазис $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$:

пусть $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 \Rightarrow \vec{f}_2 = \vec{e}_2 - \alpha \vec{f}_1 (*)$,

где коэффициент α найдём таким, чтобы $(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = 0$.

Умножим скалярно равенство $(*)$ на $\vec{f}_1$:

$$(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\vec{f}_1, \vec{e}_2) - \alpha(\vec{f}_1, \vec{f}_1) \Rightarrow 0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2) - \alpha(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \Rightarrow \alpha = \frac{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \frac{-1}{2} \Rightarrow$$

$$\vec{f}_2 = \vec{e}_2 - \alpha \vec{f}_1 = \vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \qquad \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 = (1,0).$$

Получили ортогональный базис $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$.

Теперь нормируем его и получим ортонормированный базис $H = \{\vec{h}_1, \vec{h}_2\}$, где

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|}, \quad \vec{h}_2 = \frac{\vec{f}_2}{|\vec{f}_2|}.$$

Найдём модули векторов $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$: $|\vec{f}_1| = \sqrt{(\vec{f}_1, \vec{f}_1)} = \sqrt{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \sqrt{2}$,

$$|\vec{f}_2| = \sqrt{(\vec{f}_2, \vec{f}_2)} = \sqrt{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{7}{2}}\ .$$

Тогда

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|} = \frac{\vec{e}_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0);\ \ \vec{h}_2 = \frac{\vec{f}_2}{|\vec{f}_2|} = \sqrt{\frac{2}{7}}\left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

Проверим ортонормированность построенного базиса $H = \{\vec{h}_1, \vec{h}_2\}$ с помощью матрицы перехода:

$$G_H = P^T G_S P,$$

где $P^T -$ матрица перехода от базиса S к базису H.

Матрица перехода состоит из координат новых базисных векторов в старом базисе:

$$P_{S\to H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$G_H = P^T G_S P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{7}{2}\sqrt{\frac{2}{7}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E\ .$$

Получилась единичная матрица, значит базис $H = \{\vec{h}_1, \vec{h}_2\}$ ортонормированный.

Задача 2. В пространстве $\boldsymbol{R}_3$ задан базис $e_1 = (1, -1, 1)$, $e_2 = (2, -3, 4)$, $e_2 = (2, 2, 6)$. Скалярное произведение задается формулой $(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$. Ортогонализировать систему векторов $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Решение.

Сформируем новый ортогональный базис f_1, f_2, f_3.

1. Пусть $\boldsymbol{f_1} = \boldsymbol{e_1} = (\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{1})$

2. f_2 зададим, как $f_2 = e_2 - \lambda_{21} f_1$, где λ_{21} - некоторый коэффициент.

Подберем λ_{21} таким образом, чтобы векторы f_1 и f_2 были ортогональны:

$$(f_1, f_2) = \left(\underbrace{f_1}_{e_1}, e_2 - \lambda_{21} \underbrace{f_1}_{e_1}\right) = 0 \Rightarrow (f_1, e_2) - \lambda_{21}(f_1, f_1) = 0 \Rightarrow \lambda_{21} = \frac{(f_1, e_2)}{(f_1, f_1)} = \frac{(f_1, e_2)}{|f_1|^2}$$

$(f_1, e_2) = (e_1, e_2) = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) + 1 \cdot 4 = 9$

$(f_1, f_1) = (e_1, e_1) = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 3$

$$\lambda_{21} = \frac{9}{3} = 3$$

$$f_2 = e_2 - 3f_1 = e_2 - 3e_1 = (2; -3; 4) - 3(1; -1; 1) = (-1; 0; 1)$$

$$\boldsymbol{f_2} = (-\mathbf{1}; \mathbf{0}; \mathbf{1})$$

3. $f_3 = e_3 - \lambda_{31} f_1 - \lambda_{32} f_2$, где λ_{31}, λ_{32} - некоторые коэффициенты, подобранные таким образом, чтобы векторы f_3 и f_1, f_3 и f_2 были ортогональны: $(f_3, f_1) = 0$, $(f_3, f_2) = 0$

$$(f_1, f_3) = (f_1, e_3 - \lambda_{31} f_1 - \lambda_{32} f_2) = 0 \Rightarrow \left(\underbrace{f_1}_{e_1}, e_3\right) - \lambda_{31}\left(\underbrace{f_1}_{e_1}, \underbrace{f_1}_{e_1}\right) - \lambda_{32} \underbrace{(f_1, f_2)}_{0 \text{ т.к. } f_1 \perp f_2} = 0 \Rightarrow \lambda_{31} = \frac{(f_1, e_3)}{(f_1, f_1)} = \frac{(f_1, e_3)}{|f_1|^2}$$

$(f_1, e_3) = (e_1, e_3) = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 6$

$(f_1, f_1) = (e_1, e_1) = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 3 \qquad \Rightarrow |\boldsymbol{f_1}| = \sqrt{\mathbf{3}}$

$$\lambda_{31} = \frac{6}{3} = 2$$

$(f_2, f_3) = (f_2, e_3 - \lambda_{31} f_1 - \lambda_{32} f_2) = 0 \Rightarrow$

$$(f_2, e_3) - \lambda_{31} \underbrace{(f_1, f_2)}_{0 \text{ т.к. } f_1 \perp f_2} - \lambda_{32}(f_2, f_2) = 0 \Rightarrow \lambda_{32} = \frac{(f_2, e_3)}{(f_2, f_2)} = \frac{(f_2, e_3)}{|f_2|^2}$$

$(f_2, e_3) = (f_2, e_3) = (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 4$

$(f_2, f_2) = (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2 \qquad \Rightarrow \boldsymbol{|f_2| = \sqrt{2}}$

$$\lambda_{32} = \frac{4}{2} = 2$$

$f_3 = e_3 - 2f_1 - 2f_2 = (2; 2; 6) - 2(1; -1; 1) - 2(-1; 0; 1) = (2; 4; 2)$

$\boldsymbol{f_3 = (2; 4; 2)}$

$(f_3, f_3) = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 24 \qquad \Rightarrow \boldsymbol{|f_3| = 2\sqrt{6}}$

Таким образом, построена новая ***ортогональная*** система f_1, f_2, f_3.

Нормируем эту систему векторов, поделив каждый элемента f_i на его длину, получим ***ортонормированную*** систему векторов h_1, h_2, h_3

$$h_1 = \frac{f_1}{|f_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{-1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$h_2 = \frac{f_2}{|f_2|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$h_3 = \frac{f_3}{|f_3|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Проверка : $(h_1, h_1) = 1;\ (h_2, h_2) = 1;\ (h_3, h_3) = 1;$

$(h_1, h_2) = 0;\ (h_2, h_3) = 0;\ (h_1, h_3) = 0$

Задача 3. Ортогонализировать базис $\{e_1, e_2\}$, матрица Грама в котором имеет вид $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Решение.

Пусть новый ортогональный базис f_1, f_2.

Из матрицы Грама: $(e_1, e_1) = 1$, $(e_1, e_2) = -1$, $(e_2, e_2) = 2$

1. Пусть $f_1 = e_1$, $h_1 = \frac{e_1}{|e_1|} = \frac{e_1}{1} = e_1$

2. f_2 зададим, как $f_2 = e_2 - \lambda f_1$, где λ - некоторый коэффициент, подобранный таким образом, чтобы векторы f_1 и f_2 были ортогональны:

$$(f_1, f_2) = \left(\underbrace{f_1}_{e_1}, e_2 - \lambda \underbrace{f_1}_{e_1}\right) = 0 \Rightarrow (f_1, e_2) - \lambda(f_1, f_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{(f_1, e_2)}{(f_1, f_1)} = \frac{(f_1, e_2)}{|f_1|^2}$$

(f_1, e_2) =$(e_1, e_2) = -1$ (следует из матрицы Грама)

(f_1, f_1) =$(e_1, e_1) = 1$ (следует из матрицы Грама)

$$\lambda_{21} = \left(\frac{-1}{1}\right) = -1$$

$f_2 = e_2 + f_1 = e_2 + e_1$

$h_2 = \dfrac{f_2}{|f_2|} = \dfrac{f_2}{\sqrt{(f_2; f_2)}}$

$$(f_2, f_2) = (e_2 + e_1, e_2 + e_1) = (e_2, e_2) + 2(e_2, e_1) + (e_1, e_1) = 2 - 2 + 1 = 1$$

$$|f_2| = 1 \Rightarrow h_2 = \frac{f_2}{|f_2|} = (e_1 + e_2)$$

Таким образом, новый ***ортонормированный*** базис $\{e_1, e_1 + e_2\}$

Сделаем проверку:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$G_H = P^T G_S P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E\,.$$

Задача 4. Даны векторы $p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2$ пространства $C[-1;1]$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Выполнить ортогонализацию данных векторов.

Решение.

Пусть новый ортогональный базис $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$.

1. Пусть $f_1(x) = p_1(x) = 1$

2. f_2 зададим, как $f_2 = p_2(x) - \alpha f_1$. Из условия ортогональности $(f_1, f_2) = 0 \Rightarrow (f_1, f_2) = (f_1, p_2) - \alpha(f_1, f_1) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{(f_1,p_2)}{(f_1,f_1)} = \frac{(f_1,p_2)}{|f_1|^2}$

$$(f_1, p_2) = \int_{-1}^{1} \underbrace{f_1(x)}_{p_1(x)} p_2(x)dx = \int_{-1}^{1} 1 \cdot xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} = 0$$

$$\Rightarrow f_2(x) = p_2(x) - 0 \cdot f_1 = x$$

3. $f_3(x) = p_3(x) - \beta f_1(x) - \gamma f_2(x)$. Из условий ортогональности векторов f_3 и f_1, f_3 и f_2 найдем коэффициенты β, γ:

$$(f_1, f_3) = (f_1, p_3 - \beta f_1 - \gamma f_2) = 0 \Rightarrow \left(\underbrace{f_1}_{p_1}, p_3\right) - \beta\left(\underbrace{f_1}_{p_1}, \underbrace{f_1}_{p_1}\right) - \gamma \underbrace{(f_1, f_2)}_{0 \text{ т.к. } f_1 \perp f_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\beta = \frac{(f_1, p_3)}{(f_1, f_1)} = \frac{(f_1, p_3)}{|f_1|^2}$$

$$(f_1, p_3) = \int_{-1}^{1} \underbrace{f_1(x)}_{p_1(x)} p_3(x)dx = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$(f_1, f_1) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1dx = \int_{-1}^{1} 1dx = x|_{-1}^{1} = 2$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{2/3}{2} = \frac{1}{3}$$

$$(f_2, f_3) = (f_2, p_3 - \beta f_1 - \gamma f_2) = 0 \Rightarrow (f_2, p_3) - \beta \underbrace{(f_2, f_1)}_{0} - \gamma(f_2, f_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\gamma = \frac{(f_2, p_3)}{(f_2, f_2)} = \frac{(f_2, p_3)}{|f_1|^2}$$

$$(f_2, p_3) = \int_{-1}^{1} f_2(x)p_3(x)dx = \int_{-1}^{1} x \cdot x^2 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = 0 \Rightarrow \gamma = 0$$

$$f_3(x) = p_3(x) - \frac{1}{3} f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

Таким образом, новый ***ортогональный*** базис $\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\}$.

Нормируем его:

$$(f_1, f_1) = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 dx = \int_{-1}^{1} 1 dx = x|_{-1}^{1} = 2 \Rightarrow |f_1| = \sqrt{2}$$

$$(f_2, f_2) = \int_{-1}^{1} x \cdot x dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \Rightarrow |f_2| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$(f_3, f_3) = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)^2 dx = \int_{-1}^{1} \left(x^4 - \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{9}\right) dx =$$

$$= \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} - \frac{2x^3}{9}\Big|_{-1}^{1} + \frac{x}{9}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45} \Rightarrow |f_3| = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$h_1(x) = \frac{f_1(x)}{|f_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$h_2(x) = \frac{f_2(x)}{|f_2|} = \sqrt{\frac{3}{2}} x$$

$$h_3(x) = \frac{f_3(x)}{|f_3|} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

Таким образом, новый ***ортонормированный*** базис

$\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} x, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\}$

Домашняя работа:

Типовой расчет задача 14.

Задача*. Даны векторы $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x + 1$, $p_3(x) = -x^2 - 1$ пространства $C[-1; 1]$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx$. Выполнить ортогонализацию данных векторов.