ЛЕКЦИЯ № 8.
Линейные операторы простого типа.

Теорема 14. Собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, соответствующие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

► Докажем для 2х векторов.
Пусть $\hat{A}\overrightarrow{x_1} = \lambda_1\overrightarrow{x_1}$; $\hat{A}\overrightarrow{x_2} = \lambda_2\overrightarrow{x_2}$; $\lambda_1 \neq \lambda_2$;
Рассмотрим линейную комбинацию $\alpha_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\overrightarrow{x_2} = \overline{0}$.
Подействуем $\hat{A}$ на эту линейную комбинацию.
$\hat{A}(\alpha_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\overrightarrow{x_2}) = \hat{A}\overline{0} = \overline{0}$;
В то же время $\hat{A}(\alpha_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\overrightarrow{x_2}) = \alpha_1\hat{A}\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\hat{A}\overrightarrow{x_2} = \alpha_1\lambda_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\lambda_2\overrightarrow{x_2} = \overline{0}$;
Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\overrightarrow{x_2} = \overline{0} & (1) \\ \alpha_1\lambda_1\overrightarrow{x_1} + \alpha_2\lambda_2\overrightarrow{x_2} = \overline{0} & (2) \end{cases}$$

Вычтем из 2го уравнения 1-е , умноженное на λ_1: $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1)\overrightarrow{x_2} = \overline{0}$
$\lambda_1 \neq \lambda_2; \overrightarrow{x_2} \neq \overline{0} \Rightarrow \alpha_2 = 0$.
Вычтем из 2го уравнения 1-е , умноженное на λ_2: $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)\overrightarrow{x_1} = \overline{0}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2; \overrightarrow{x_1} \neq \overline{0} \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{x_1}$ и $\overrightarrow{x_2}$ линейно независимы. ◄

Для общего случая ($n \geq 2$ векторов) доказательство проводится методом математической индукции.

Следствие. Пусть $\hat{A}$- линейный оператор, действующий в линейном пространстве L, dim L=n, и имеет n различных собственных значений $\lambda_1 \dots \lambda_n$. Тогда отвечающие им собственные векторы $\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n$ образуют базис в L.

►Система векторов $\{\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n\}$ л.н.з., dim L=n =>
$\{\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n\}$ образует базис в L. ◄

Определение. Линейный оператор $\hat{A}$: L⟶ L называется оператором простого типа (диагонализируемый), если существует базис линейного пространства L, состоящий из собственных векторов $\hat{A}$.

Теорема 15. (достаточное условие оператора простого типа) Пусть dim L=n. Если $\hat{A}: L \to L$ имеет n попарно различных собственных значений, то он является оператором простого типа.

►По теореме 14 собственные векторы имеющие различные собственные значения линейно-независимы , тогда в пространстве размерности n существует n линейно-независимых собственных векторов. Следовательно, они образуют базис. Тогда по определению линейный оператор $\hat{A} -$ простого типа. ◄

Замечание. Обратное утверждение не верно, например, тождественный оператор $\hat{I}$ является оператором простого типа и имеет единственное собственное значение $\lambda = 1$.

Теорема 16. Пусть линейный оператор $\hat{A} -$ простого типа. Тогда в собственном базисе действия линейного оператора сводятся к умножению координат вектора на соответствующие собственное число.

► $\widehat{A}(\overline{x}) = \hat{A}(x_1\overline{e}_1+\ldots+x_n\overline{e}_n) = x_1\hat{A}\overline{e}_1+\ldots+x_n\hat{A}\overline{e}_n=$
$= x_1\lambda_1\overline{e}_1+\ldots+x_n\lambda_n\overline{e}_n;$ ◄

Теорема 17. Пусть $\hat{A}$- оператор простого типа. Его матрица A в некотором базисе имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда это базис из собственных векторов.

►

Необходимость. Пусть S={$\overline{e}_1 \ldots \overline{e}_n$}- это базис из собственных векторов;

$\overline{e}_i = (0 \ldots 1 \ldots 0)_s$; $\hat{A}(\overline{e}_i) = \lambda_i\overline{e}_i$=$(0 \ldots \lambda_i \ldots 0)$; => Матрица л.о.

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_i & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \lambda_i & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix};$$

Достаточность. Пусть матрица линейного оператора имеет диагональный вид. Тогда $\hat{A}(\overline{e}_i)$=$(0 \ldots \lambda_i \ldots 0)$=$\lambda_i\overline{e}_i$ => S={$\overline{e}_1 \ldots \overline{e}_n$} это базис из собственных векторов. ◄

Пример1:

Рассмотрим тождественный оператор $\hat{I}$ в V_3.

Матрица тождественного оператора в любом базисе является единичной матрицей E = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и имеет диагональный вид, следовательно $\hat{I}$ – линейный оператор простого типа.

Еще раз отметим, что данный линейный оператор имеет три одинаковых собственных значения, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ и, тем не менее, он является оператором простого типа.

Задача 1. Рассмотрим задачу из лекции 7. Мы нашли собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, заданного матрицей A.

A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Давайте определим, будет ли $\hat{A}$ оператором простого типа.

Решение

Собственные значения данного линейного оператора:

$\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = -3$

Они различны. Тогда, по теореме 15, мы можем сразу сделать вывод о том, что это линейный оператор простого типа. Его матрица в базисе из собственных векторов будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

На главной диагонали стоят собственные значения.

Давайте найдем этот базис.

$\boldsymbol{\lambda_1 = 1}$ соответствуют собственные векторы $X^1 = c\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

Выберем из этого множества один вектор. Возьмем c=1, Получим вектор $\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{\lambda_2 = 3}$ соответствуют собственные векторы $X^2 = c\begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{11}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$;

Возьмем c=5, получим вектор $\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{\lambda_3}$**= -3** соответствуют собственные векторы $X^3 = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Возьмем с=1, получим вектор $\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Таким образом мы нашли три линейно-независимых собственных вектора. $\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\overline{f}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Они будут образовывать базис из собственных векторов, в котором матрица линейного оператора будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Проверим выполнение формулы $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$;

Матрица перехода P = $\begin{pmatrix} -1 & 7 & -1 \\ -3 & 11 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; $P^{-1} = \frac{1}{48}\begin{pmatrix} 6 & -12 & 18 \\ 4 & 0 & 4 \\ -26 & 12 & 10 \end{pmatrix}$;

$$A' = \frac{1}{48}\begin{pmatrix} 6 & -12 & 18 \\ 4 & 0 & 4 \\ -26 & 12 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 7 & -1 \\ -3 & 11 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{48}\begin{pmatrix} 6 & -12 & 18 \\ 12 & 0 & 12 \\ 78 & -36 & -30 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 7 & -1 \\ -3 & 11 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$;верно.

Задача 2. Определить собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\widehat{A}$, заданного матрицей А. Является ли линейный оператор $\hat{A}$ оператором простого типа? Если да, то выписать матрицу линейного оператора в базисе из собственных векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 & -3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение.

Найдем собственные значения. Для этого составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -5 & -3 \\ 3 & -2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda + \lambda - 2 =$$

$\lambda(\lambda-2)^2+\lambda-2=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+1)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$

$\lambda_1=\lambda_2=1$; $\lambda_3=2$ - собственные значения.

Так как $\lambda_1=\lambda_2$, мы пока не можем сказать, будет ли линейный оператор простого типа.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственным значениям.

$\boldsymbol{\lambda_1=\lambda_2=1}$**;** Решим систему (A-E)$\overline{X}=\overline{O}$

$\begin{pmatrix}5 & -5 & -3\\ 3 & -3 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, решим систему методом Гаусса.

Из первой строки вычтем 2-ю и 3-ю, а затем из 2-й вычтем 3-ю

$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 3 & -3 & -2\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$;

$rang\ A=2;$

$x_3=0;\ \ x_2=c;\ x_1-x_2=0;\ =>x_1=c$

$X^1=\begin{pmatrix}c\\ c\\ 0\end{pmatrix}$- собственные векторы, соответствующие $\lambda_1=\lambda_2=1$

$\boldsymbol{\lambda_3=2}$**;** Решим систему (A-2E)$\overline{X}=\overline{O}$

$\begin{pmatrix}4 & -5 & -3\\ 3 & -4 & -2\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, решим систему методом Гаусса.

$\begin{pmatrix}4 & -5 & -3\\ 3 & -4 & -2\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 3 & -4 & -2\\ 4 & -5 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$rang\ A=2;\ x_3=c;\ x_2=c;\ x_1-x_2-x_3=0;\ x_1=2c.$

$X^2=\begin{pmatrix}2c\\ c\\ c\end{pmatrix}$ - собственные векторы, соответствующие λ_3=2.

Мы можем найти всего два линейно-независимых собственных вектора. Таким образом, не существует базиса из собственных векторов, значит данный линейный оператор **не является линейным оператором простого типа.**

Задача 3

Определить собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\widehat{A}$, заданного матрицей А. Является ли линейный оператор $\hat{A}$ оператором простого типа? Если да, то выписать матрицу линейного оператора в базисе из собственных векторов.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Решение:

Найдем собственные значения. Для этого составим характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E)=0$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^3+2-3(1-\lambda)=\lambda^2(3-\lambda)=0$$

$\lambda_1=\lambda_2=0$; $\lambda_3=3$ - собственные значения.

Так как $\lambda_1=\lambda_2$, мы пока не можем сказать, будет ли линейный оператор простого типа.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственным значениям.

$\boldsymbol{\lambda_1=\lambda_2=0}$; Решим систему $(A\text{-}0E)\overline{X}=\overline{O}$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$, решим систему методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix};\ rang\ A=1;$$

$x_2=c_1$; $x_3=c_2$; $x_1+c_1+c_2=0$; $=> x_1=-c_1-c_2$;

$$X^1=\begin{pmatrix}-c_1-c_2\\ c_1\\ c_2\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$ - собственные векторы, соответствующие $\lambda_1=\lambda_2=0$.Выберем из этого множества векторов два линейно независимых вектора.

$$\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{\lambda_3 = 3}$**.** Решим систему $(A - 3E)X = O$.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ решим систему методом Гаусса.}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rang} A = 2; x_3 = c;\ x_2 = c;\ x_1 + \mathrm{c} - 2\mathrm{c} = 0 => x_1 = c.$

$X^2 = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix}$ - собственные векторы, соответствующие $\lambda_3 = 3$. Выберем один $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Мы нашли три собственных вектора, однако характеристическое уравнение имеет кратные корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Проверим, будут ли собственные векторы образовывать базис.

Составим матрицу из координат собственных векторов $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\operatorname{rang} = 3$ => собственные векторы линейно-независимы => они образуют базис в линейном пространстве L, так как $\dim L = 3$, следовательно $\hat{A}$ является оператором простого типа и его матрица в базисе из собственных векторов имеет вид: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.