ЛЕКЦИЯ № 7
Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.

Пусть L - n-мерное линейное пространство.

$\hat{A}: L \to L$ – линейный оператор, действующий в L.

Определение. Ненулевой вектор $\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ в линейном пространстве L называют ***собственным вектором линейного оператора*** $\hat{\mathbf{A}}: L \to L$, отвечающим ***собственному значению*** $\boldsymbol{\lambda}$, $(\lambda \in R)$, если $\hat{A}\vec{a} = \lambda\vec{a}$.

Изучение собственных векторов и собственных значений занимает важное место в теории линейных операторов. Это связано с тем, что многие операции, содержащие линейный оператор, значительно упрощаются, если в качестве векторов базиса линейного пространства, в котором действует оператор, выбрать собственные векторы этого оператора.

Замечание 1 Каждому собственному значению (числу) соответствуют свои собственные векторы, причем таких бесконечно много.

Замечание 2. Каждому собственному вектору соответствует единственное собственное значение (число).

Замечание 3. В пространстве геометрических векторов собственные векторы линейного оператора, это векторы, которые под его воздействием переходят в себе коллинеарные.

Примеры:

Рассмотрим линейный операторы, действующие в линейном пространстве V_3 и найдем их собственные значения и собственные векторы.

1) Оператор проектирования на плоскость XOZ:

$$\hat{A}(\alpha\bar{i}) = \alpha\bar{i}; \qquad \hat{A}(\alpha\bar{j}) = \bar{0} = 0\bar{j}; \qquad \hat{A}(\alpha\bar{k}) = \alpha\bar{k}.$$

Векторы, параллельные координатным осям являются собственными с собственными значениями *1;0;1*.

2) Гомотетия с коэффициентом k.

$\hat{A}(\bar{x}) = k\bar{x}$.; т.е. $\forall\bar{x} \in V_3$ является собственным с собственным значением $\lambda = k$.

3) $\hat{I}: L \to L$ – тождественный оператор: $\hat{I}\vec{x} = \vec{x} \Rightarrow \forall$ вектор $\vec{x} \in L$ является собственным с собственным значением $\lambda = 1$.

Определение. ***Характеристическим многочленом*** **матрицы** называется следующий многочлен $\boldsymbol{\chi(\lambda)}$ =**det** $(\mathrm{A} - \boldsymbol{\lambda E})$.

Определение. ***Характеристическим уравнением матрицы*** называется следующее уравнение : **det** $(\mathrm{A} - \boldsymbol{\lambda E}) = \mathbf{0}$. Его корни называются ***характеристическими числами*** матрицы.

Определение. Характеристическим многочленом и характеристическим уравнением линейного оператора называются соответственно характеристический многочлен и характеристическое уравнение его матрицы в каком-либо базисе.

Теорема 12. Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса; корни характеристического уравнение также не зависят от выбора базиса.

►Пусть матрицы линейного оператора в первом базисе A; во втором A′; P-матрица перехода от первого базиса ко второму.

Тогда $\mathrm{A}' = P^{-1}AP$. Составим характеристическое уравнение:

det $(\mathrm{A}' - \lambda E) =$ det $(P^{-1}AP - \lambda E)$= det $(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}EP)$ =

det $(P^{-1}(A - \lambda E)P)$ = det$(P^{-1})\, det(A - \lambda E) det P$ = det $(A - \lambda E)$ ◄

Теорема 13. Для того, чтобы действительное число λ являлось собственным значением линейного оператора, необходимо и достаточно, чтобы оно было корнем характеристического уравнения этого оператора.

►

<u>Необходимость:</u> Пусть λ – собственное значение л.о. $\hat{A}$;

$\overline{x}$ – собственный вектор, ему отвечающий. Тогда $\hat{A}\,\overline{x} = \lambda\overline{x}$; ; $\overline{x} \neq \overline{0}$;

$\hat{A}\,\overline{x} = \lambda\hat{I}\overline{x}$ => $(\hat{A} - \lambda\hat{I})\,\overline{x} = \overline{0}$; Запишем в матричном виде:

(A-$\lambda E)\overline{x}$ =$\overline{0}$, где A- матрица $\hat{A}$ в каком либо базисе;

(A-$\lambda E)\overline{x}$ =$\overline{0}$, однородная система линейных уравнений, которая имеет ненулевое решение $\overline{x} \neq \overline{0}$, так как $\overline{x}$ − собственный вектор $\hat{A}$ =>

λ удовлетворяет уравнению det (A-$\lambda E) = 0$

⇨ λ- корень характеристического уравнения.

<u>Достаточность:</u> Пусть λ −корень характерестического уравнения =>

det $(\text{A-}\lambda E) = 0$ => однородная система уравнений $(\text{A-}\lambda E)\overline{x} = \overline{0}$ имеет ненулевое решение $\overline{x}$ и для $\overline{x}$ выполняется $(\hat{A} - \lambda\hat{I})\,\overline{x} = \overline{0}$ => $\hat{A}\,\overline{x} = \lambda\overline{x}$ => $\lambda -$ собственный вектор отвечающий собственному значению λ. ◄

Каждому собственному значению λ линейного оператора сопоставляют его ***кратность***, полагая ее кратности корня λ характеристического уравнения.

Алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов линейного оператора.

1) Выбрать базис в линейном пространстве L и составить в нем матрицу A линейного оператора $\hat{A}$;
2) Составить характеристическое уравнение det $(\text{A} - \lambda E) = 0$ и найти все его действительные корни $\lambda_{\text{к}}$;
3) Для каждого $\lambda_{\text{к}}$ найти фундаментальную систему решений для однородной системы $(\text{A-}\lambda_{\text{к}}\text{E})\vec{x}$=0. Найденная ФСР состоит из искомых собственных векторов.

Пример 1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, заданного в некотором базисе двумерного пространства матрицей:

$$4)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение. Составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow$$

$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$, откуда получим $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 7$ – собственные значения.

Координаты собственного вектора $\vec{x} = (x_1;\ x_2)$, принадлежащего собственному значению λ, удовлетворяют матричному уравнению:

$$(A - \lambda E)X = O \Rightarrow \begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Или, что тоже самое, системе:

$$\begin{cases} (4-\lambda)x_1 + 3x_2 = 0, \\ 2x_1 + (5-\lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

При $\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{2}$ решаем систему $(A - \ 2E)X \quad = O$:

$$\begin{pmatrix} 4-2 & 3 \\ 2 & 5-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2}x_2.$$

Выбирая в качестве свободной переменной x_2, т.е. $x_2 = C$, получим общее решение системы:

$$X^1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\mathrm{C} \\ \mathrm{C} \end{pmatrix} = \mathrm{C}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, C \in \mathbb{R} \ \Rightarrow$$

$\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}} = \left(-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\mathrm{C}; \mathrm{C}\right), C \in \mathbb{R}$ – все собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 2$.

Полагая, например, $C = 2$, получим собственный вектор $\vec{f_1} = (-3; 2)$, который представляет собой фундаментальную систему решений данной системы.

При $\boldsymbol{\lambda_2} = \mathbf{7}$ решаем систему $(A - \ 7E)X \quad = O$:

$$\begin{pmatrix} 4-7 & 3 \\ 2 & 5-7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Выбирая в качестве свободной переменной x_2, т.е. $x_2 = C$, получим общее решение системы:

$$X^2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{C} \\ \mathrm{C} \end{pmatrix} = \mathrm{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C \in \mathbb{R} \ \Rightarrow$$

Фундаментальная система решений состоит из одного вектора $\vec{f_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\vec{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{2}} = (\mathrm{C}; \mathrm{C}), C \in \mathbb{R}$ – собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_2 = 7$.

Пример 2. Определить собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$, заданного матрицей А.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. Найдем собственные значения. Для этого составим характеристическое уравнение $\det(\mathrm{A} - \lambda E) = 0$.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 4 & -\lambda & 1 \\ 3 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$ Вычислим определитель по правилу Саррюса.

$\lambda^2\,(1-\lambda)+3-8+6\lambda-4(1-\lambda)-\ \lambda=\lambda^2\,(1-\lambda)-5(1-\lambda)-4(1-\lambda)=$ $(1\text{-}\,\lambda)(\lambda^2-9)=0$; $(1\text{-}\,\lambda)(\lambda-3)(\lambda+3)$=0.

λ_1= 1; λ_2= 3; λ_3= -3 - собственные значения линейного оператора.

Найдем собственные векторы, соответствующие найденным собственным значениям.

$\boldsymbol{\lambda_1}$= 1;

Решим систему (A-1·E)$\overline{X}$=$\overline{O}$;

Найдем матрицу A-E $=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 4 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}$;

Тогда система принимает вид:

$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 4 & -1 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, решим систему методом Гаусса.

$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 9\\ 0 & 2 & 6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; $rang\ A=2;$

$\begin{cases} x_3=\text{c}\\ x_2+3x_3=0\\ -x_1+x_2+2x_3=0\end{cases}$ $x_3=\text{c};\ x_2=-3c;\ x_1=-\text{c}.$

X^1=$\begin{pmatrix}-\text{c}\\ -3c\\ \text{c}\end{pmatrix}$=$c\begin{pmatrix}-1\\ -3\\ 1\end{pmatrix}$ - собственные векторы, соответствующие λ_1=1.

$\boldsymbol{\lambda_2}$= 3;

Решим систему (A-3E)$\overline{X}$=$\overline{O}$;

Найдем матрицу A-3E $=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 4 & 0 & 1\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 4 & -3 & 1\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 4 & -3 & 1\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, решим систему методом Гаусса.

$\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 4 & -3 & 1\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}+I\text{строка}\sim\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & -5 & 11\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$rang\ A=2;$

$\begin{cases} x_3 = \text{c} \\ -5x_2 + 11x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$; $x_3 = \text{c};\ x_2 = \frac{11}{5}c;\ x_1 = \frac{7}{5}\text{c}.$

$X^2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{c11}{5} \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{11}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ - собственные векторы, соответствующие λ_2=3.

λ_3= -3;

Решим систему (А+3Е)$\overline{X}$=$\overline{O}$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, решим систему методом Гаусса.

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} - I\text{строка} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$rang\ A = 2;$

$\begin{cases} x_3 = \text{c} \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$; $x_3 = c;\ x_2 = c;\ x_1 = -c$

$x_2 = 0;\ x_3 = c;\ x_1 = 2c.$

$X^3 = \begin{pmatrix} -c \\ c \\ c \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ - собственные векторы, соответствующие λ_3= - 3.