

ЛЕКЦИЯ № 5.

Линейные операторы и их матрицы.

Понятие линейного оператора. Его свойства и примеры. Матрица линейного оператора.

1. Понятие линейного оператора. Его свойства и примеры

Пусть L -линейное пространство;

Определение. $\hat{A}: L \rightarrow L$ называется отображением в линейном пространстве L , если каждому вектору $\vec{x} \in L$ ставится в соответствие единственный вектор $\vec{y} \in L$;

Тогда $\vec{y} = \hat{A}(\vec{x})$; \vec{y} - образ вектора \vec{x} ; \vec{x} - прообраз \vec{y} .

Определение. Отображение \hat{A} , действующее в L , называется **линейным оператором**, если выполняются следующие условия:

- 1) $\hat{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \hat{A}\vec{x} + \hat{A}\vec{y}; \forall \vec{x}, \vec{y} \in L$
- 2) $\hat{A}(\alpha\vec{x}) = \alpha\hat{A}\vec{x}; \forall \vec{x} \in L, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Свойства линейного оператора .

$\forall \vec{x}, \vec{y} \in L; \alpha; \beta \in \mathbb{R}$.

- 1) $\hat{A}(\vec{0}) = \vec{0}$
- 2) $\hat{A}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\hat{A}\vec{x} + \beta\hat{A}\vec{y}$
- 3) $\hat{A}(-\vec{x}) = -\hat{A}\vec{x}$
- 4) $\hat{A}(\alpha\vec{x} - \beta\vec{y}) = \alpha\hat{A}\vec{x} - \beta\hat{A}\vec{y}$
- 5) \hat{A} переводит линейно-зависимые векторы в линейно-зависимые.

◀ Пусть векторы $\vec{x}_1; \dots; \vec{x}_n$ линейно зависимы, тогда существует их нетривиальная линейная комбинация ($\exists \alpha_i \neq 0$), $\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0}; \alpha_i \in \mathbb{R}$.

Подействуем линейным оператором: $\hat{A}(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i) = \hat{A}(\vec{0}) = \vec{0}$; с другой

стороны $\hat{A}(\sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \hat{A}\vec{x}_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \hat{A}\vec{x}_i = \vec{0} \Rightarrow$ получили

нетривиальную линейную комбинацию образов векторов, равную нулевому вектору \Rightarrow образы линейно-зависимых векторов линейно -зависимы. ▶

Линейный оператор будем сокращенно обозначать л.о.

Примеры линейных операторов:

- 1) Нулевой оператор $\widehat{O}: L \rightarrow L$, отображающий любой вектор пространства L в нулевой вектор этого пространства: $\widehat{O}\vec{x} = \vec{0} \forall \vec{x} \in L$.
 Действительно,

$$\widehat{O}(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{0} = \widehat{O}\vec{x} + \widehat{O}\vec{y}$$

$$\widehat{O}(\alpha\vec{x}) = \vec{0} = \alpha\widehat{O}\vec{x}$$
- 2) Тожественный оператор $\widehat{I}: L \rightarrow L$, отображающий любой вектор пространства L в себя: $\widehat{I}\vec{x} = \vec{x} \forall \vec{x} \in L$ является линейным оператором (доказать самостоятельно)
- 3) В V_2 (пространстве свободных векторов на плоскости) - поворот вектора на заданный угол φ против часовой стрелки;

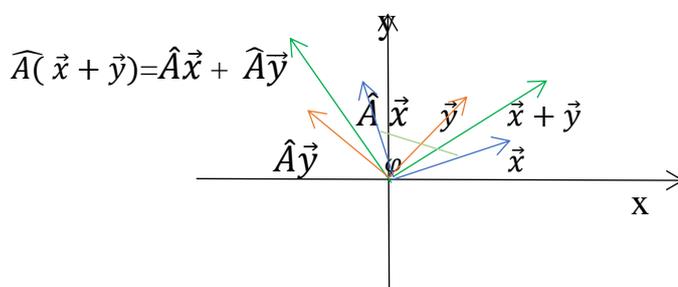
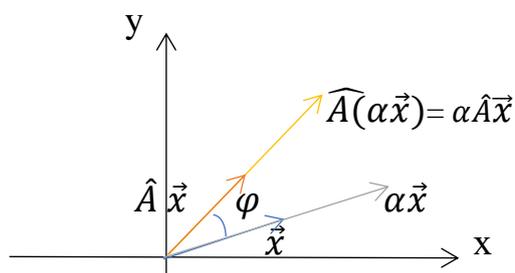


Рисунок 7

- 4) В P_n (линейном пространстве многочленов степени не выше n) – оператор дифференцирования : $\widehat{A}(p(t)) = p'(t)$

$$\hat{A}: P_n \rightarrow P_n; (p_1(t) + p_2(t))' = (p_1(t))' + (p_2(t))'$$

$$(\alpha p(t))' = \alpha(p(t))'$$

5) $\hat{A}: R^n \rightarrow R^n$ – гомотетия с коэффициентом k : $\hat{A}\vec{x} = k\vec{x}$

$$\hat{A}(\vec{x} + \vec{y}) = k(\vec{x} + \vec{y}) = k\vec{x} + k\vec{y} = \hat{A}\vec{x} + \hat{A}\vec{y};$$

$$\hat{A}(\alpha\vec{x}) = k(\alpha\vec{x}) = \alpha k\vec{x} = \alpha\hat{A}\vec{x};$$

Не является линейным оператором:

$$\hat{A}: R^n \rightarrow R^n, \hat{A}\vec{x} = \vec{x} + \vec{a};$$

$$\hat{A}(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{x} + \vec{y} + \vec{a} \neq \hat{A}\vec{x} + \hat{A}\vec{y} \text{ – не выполняется свойство линейности;}$$

2. Матрица линейного оператора . Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса.

Пусть L - конечномерное линейное пространство.

Определение. Матрицей линейного оператора $\hat{A}L \rightarrow L$, действующего в n -мерном линейном пространстве L с базисом $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ называется матрица, составленная из координат образов базисных векторов, записанных по столбцам.

Т.е., если в L существует некоторый базис $S = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, и

$$\hat{A}\vec{e}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + \dots + a_{n1}\vec{e}_n,$$

$$\hat{A}\vec{e}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + \dots + a_{n2}\vec{e}_n$$

.....

$$\hat{A}\vec{e}_n = a_{1n}\vec{e}_1 + \dots + a_{nn}\vec{e}_n.$$

то $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Примеры:

1. Нулевой оператор $\hat{O}: L \rightarrow L, \dim L = n \Rightarrow$

$$\hat{O}\vec{e}_1 = \vec{0} = (0, \dots, 0),$$

.....

$$\hat{O}\vec{e}_n = \vec{0} = (0, \dots, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

2. Тождественный оператор $\hat{I}: L \rightarrow L, \dim L = n \Rightarrow$

$$\hat{I}\vec{e}_1 = \vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$\hat{I}\vec{e}_2 = \vec{e}_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

.....

$$\hat{I}\vec{e}_n = \vec{e}_n = (0, 0, \dots, 1).$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$

3. Оператор $\hat{A}: V_3 \rightarrow V_3$ - гомотетия с коэффициентом $k, \dim V_3 = 3 \Rightarrow$

$$\hat{A}\vec{e}_1 = k\vec{e}_1 = (k, 0, 0),$$

$$\hat{A}\vec{e}_2 = k\vec{e}_2 = (0, k, 0)$$

$$\hat{A}\vec{e}_3 = k\vec{e}_3 = (0, 0, k)$$

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

4. Оператор $\hat{A}: P_2 \rightarrow P_2$ - оператор дифференцирования, $\dim P_2 = 3 \Rightarrow$

$$\hat{A}\vec{e}_1 = \hat{A}(1) = (1)' = 0 = (0, 0, 0)$$

$$\hat{A}\vec{e}_2 = \hat{A}(t) = (t)' = 1 = (1, 0, 0)$$

$$\hat{A}\vec{e}_3 = \hat{A}(t^2) = (t^2)' = 2t = (0, 2, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 1. Если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица линейного оператора $\hat{A}: L \rightarrow$

L в базисе $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}, \dim L = n$, то $\vec{y} = \hat{A}\vec{x}$ и координаты образа \vec{y} произвольного вектора $\vec{x} \in L$ находятся по формуле:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

или

$$Y = AX,$$

где $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец координат вектора \vec{y} в базисе $S =$

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ - вектор-столбец координат вектора \vec{x} в это же

базисе. Таким образом, действие линейного оператора \hat{A} на вектор \vec{x}

сводится к умножению некоторой матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ на вектор-

столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, составленный из координат вектора \vec{x} в базисе $S =$

$\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$.

◀ Т.к. $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ - базис в L , то \forall вектор $\in L$ разложим по базису.

Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n$ и $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \dots + y_n\vec{e}_n \Rightarrow$

$\vec{y} = \hat{A}\vec{x} = \hat{A}(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n) = x_1\hat{A}\vec{e}_1 + x_2\hat{A}\vec{e}_2 + \dots + x_n\hat{A}\vec{e}_n =$

$= x_1(a_{11}\vec{e}_1 + \dots + a_{n1}\vec{e}_n) + x_2(a_{12}\vec{e}_1 + \dots + a_{n2}\vec{e}_n) +$

$+ x_n(a_{1n}\vec{e}_1 + \dots + a_{nn}\vec{e}_n) = (x_1a_{11} + x_2a_{12} + \dots + x_na_{1n})\vec{e}_1 +$

$+ (x_1a_{21} + x_2a_{22} + \dots + x_na_{2n})\vec{e}_2 + \dots + (x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + \dots + x_na_{nn})\vec{e}_n =$

$= y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \dots + y_n\vec{e}_n \Rightarrow$

$y_1 = x_1a_{11} + x_2a_{12} + \dots + x_na_{1n}$

$y_2 = x_1a_{21} + x_2a_{22} + \dots + x_na_{2n}$

...

$y_n = x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + \dots + x_na_{nn}$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{12} + \dots + x_na_{1n} \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + \dots + x_na_{2n} \\ \dots \\ x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + \dots + x_na_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

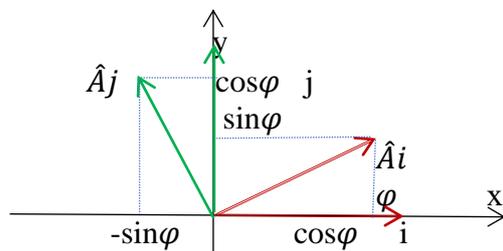
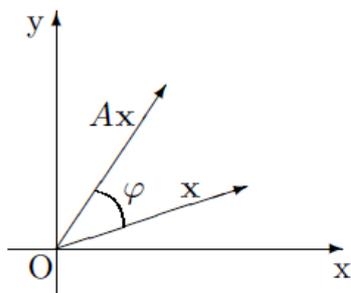
$Y = AX$. ▶

Замечание. Матрица линейного оператора полностью характеризует линейный оператор. Кроме того, любая квадратная матрица порядка n определяет линейный оператор n -мерного линейного пространства L .

Теорема 2. (без доказательства)

Пусть в л.п. L ($\dim L=n$) отражение $\vec{y} = \hat{A}\vec{x}$ задается формулой $\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, где $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ - координаты векторов в базисе S , A - некоторая матрица размера $n \times n$, Тогда \hat{A} - линейный оператор и его матрица в базисе S совпадает с матрицей A .

Пример. Найти матрицу оператора $\hat{A}: V_2 \rightarrow V_2$ поворот на угол φ против часовой стрелки и образ вектора $\vec{x} = (1; -1)$ при повороте на угол $\varphi = \frac{\pi}{4}$.



$$\hat{A}\vec{i} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$$

$$\hat{A}\vec{j} = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$$

$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ - матрица линейного оператора - поворот на угол φ против часовой стрелки.

При $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$;

Координаты образа вектора $\vec{x} = (1; -1)$ найдем по формуле $Y = AX$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{y} = \hat{A}\vec{x} = (\sqrt{2}; 0)$$

Задача. Оператор \hat{A} действует в пространстве R^3 , $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$. Проверить, является ли оператор \hat{A} линейным. В случае линейности записать матрицу оператора \hat{A} в каноническом базисе пространства R^3 .

а) $\hat{A}\vec{x} = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1 + 3x_2 - x_3, -x_2 + 2x_3)$

б) $\hat{B}\vec{x} = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1 + 3x_2 - x_3, -x_2 + 2)$

с) $C\vec{x} = (x_1 + x_2 - x_3^2; 4x_2; 2x_2 - x_3^3)$

а) $\hat{A}: R^3 \rightarrow R^3$, т.е. \hat{A} вектор из R^3 переводит в R^3 .

Проверим линейность оператора

$$\begin{aligned} 1. \hat{A}(\vec{x} + \vec{y}) &= (x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2) - 3(x_3 + y_3), 2(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3), -(x_2 + y_2) + 2(x_3 + y_3)) = \\ &= (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1 + 3x_2 - x_3, -x_2 + 2x_3) + \\ & (y_1 + 2y_2 - 3y_3, 2y_1 + 3y_2 - y_3, -y_2 + 2y_3) = \hat{A}\vec{x} + \hat{A}\vec{y}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \hat{A}(\alpha\vec{x}) &= (\alpha x_1 + 2\alpha x_2 - 3\alpha x_3, 2\alpha x_1 + 3\alpha x_2 - \alpha x_3, -\alpha x_2 + 2\alpha x_3) = \\ &= \alpha(x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1 + 3x_2 - x_3, -x_2 + 2x_3) = \alpha\hat{A}\vec{x} \end{aligned}$$

Условия линейности выполняются $\Rightarrow \hat{A}$ – линейный оператор.

Найдем матрицу линейного оператора в каноническом базисе.

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0); \vec{e}_2 = (0, 1, 0); \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

$$\hat{A}\vec{e}_1 = (1, 2, 0)$$

$$\hat{A}\vec{e}_2 = (2, 3, -1)$$

$$\hat{A}\vec{e}_3 = (-3, -1, 2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

б) $\hat{B}: R^3 \rightarrow R^3$, т.е. \hat{B} вектор из R^3 переводит в R^3 .

Проверим линейность оператора \hat{B} :

$$\hat{B}(\vec{x} + \vec{y}) = (x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2) - 3(x_3 + y_3), 2(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3), -(x_2 + y_2) + 2);$$

$$\hat{B}\vec{x} + \hat{B}\vec{y} = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x_1 + 3x_2 - x_3, -x_2 + 2) + (y_1 + 2y_2 - 3y_3, 2y_1 + 3y_2 - y_3, y_2 + 2) = (x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2) - 3(x_3 + y_3), 2(x_1 + y_1) + 3(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3), -(x_2 + y_2) + 4) \neq \hat{B}(\vec{x} + \vec{y})$$

Условие линейности оператора не выполняется, $\Rightarrow \hat{B}$ не является линейным оператором.

с) $\hat{C}: R^3 \rightarrow R^3$, оператор $C\vec{x} = (x_1 + 7x_2 - x_3^2; 4x_2; 2x_2 - x_3^3)$ вектор из R^3 переводит в вектор из R^3 .

Проверим линейность оператора \hat{C} :

$$\hat{C}(\vec{x} + \vec{y}) = ((x_1 + y_1) + 7(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3)^2; 4(x_2 + y_2); 2(x_2 + y_2) - (x_3 + y_3)^3) = (x_1 + y_1 + 7x_2 + 7y_2 - x_3^2 - 2x_3y_3 - y_3^2; 4x_2 + 4y_2; 2x_2 + 2y_2 - x_3^3 - 3x_3^2y_3 - 3x_3y_3^2 - y_3^3)$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} \hat{C}\vec{x} + \hat{C}\vec{y} &= (x_1 + 7x_2 - x_3^2; 4x_2; 2x_2 - x_3^3) + (y_1 + 7y_2 - y_3^2; 4y_2; 2y_2 - y_3^3) = \\ &= (x_1 + 7y_1 + x_2 + 7y_2 - x_3^2 - y_3^2; 4x_2 + 4y_2; 2x_2 + 2y_2 - x_3^3 - y_3^3) \Rightarrow \\ &\hat{C}(\vec{x} + \vec{y}) \neq \hat{C}(\vec{x}) + \hat{C}(\vec{y}). \end{aligned}$$

Условие линейности оператора не выполняется $\Rightarrow \hat{C}$ не является линейным оператором.