ЛЕКЦИЯ №3

Линейные пространства.

Преобразование координат вектора при переходе к другому базису.

Линейные подпространства.

1. Преобразование координат вектора при переходе к другому базису.

Все базисы в линейном пространстве равноправны. При решении конкретных задач выбирается более удобный базис. При изменении базиса, изменяются и координаты вектора, и возникает задача преобразования координат вектора при переходе к другому базису.

Пусть L – линейное пространство, на котором заданы два базиса:

$S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$– старый базис в L;

$S' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n\}$ – новый базис в L.

Любой вектор можно разложить по базису, поэтому разложим каждый вектор $\vec{f}_i$ нового базиса S' по старому базису S:

$$\vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{e}_n = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1})$$
$$\ldots$$
$$\vec{f}_n = a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{nn})$$

Составим из полученных координат матрицу, записывая координаты векторов $\vec{f}_i$ **в столбцы**:

$$P = P_{S\to S'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение. Матрица P называется ***матрицей перехода от старого базиса S к новому базису S′.***

Замечание. Матрица перехода состоит из координат векторов нового базиса в старом, записанных ***по столбцам.***

Свойства матрицы перехода:

1. Матрица перехода $P_{S\to S'}$ невырожденная: $\det P_{S\to S'} \neq 0$.

◄ Действительно, матрица P состоит из координат базисных векторов. Так как они линейно независимы, то ранг матрицы равен числу векторов $\Rightarrow \det P \neq 0$. ►

2. Матрица перехода $P_{S\to S'}$ обратима.

◄ Матрица $P_{S\to S'}$ невырожденная, значит она имеет обратную P^{-1}. ►

3. Если в n-мерном линейном пространстве задан базис S, то для любой невырожденной квадратной матрицы P порядка n существует такой базис S' в этом линейном пространстве, что P является матрицей перехода от базиса S к этому базису S'.

◄ Из невырожденности матрицы P следует, что ее ранг равен n, и поэтому ее столбцы линейно независимы. Линейная независимость столбцов матрицы равносильна линейной независимости системы n векторов S'. Так линейное пространство n-мерно, то эта система является базисом. ►

4. Если P - матрица перехода от старого базиса S к новому базису S' линейного пространства, то P^{-1} - матрица перехода от базиса S' к базису S.
5. Если в линейном пространстве заданы базисы S_1, S_2 и S_3, при этом $P_{S_1\to S_2}$ - матрица перехода от базиса S_1 к базису S_2, а $P_{S_2\to S_3}$ - матрица перехода от базиса S_2 к базису S_3, то произведение этих матриц $P_{S_1\to S_2}\cdot P_{S_2\to S_3}=P_{S_1\to S_3}$ - матрица перехода от базиса S_1 к базису S_3.

Пример. Найти матрицу перехода от базиса $S=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ к базису $S'=\{\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3\}$, если $\vec{f}_1=\vec{e}_1+\vec{e}_2+2\vec{e}_3$, $\vec{f}_2=2\vec{e}_1-\vec{e}_2$, $\vec{f}_3=-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3$.

Решение: Матрица перехода состоит из координат векторов нового базиса в старом, записанных по столбцам: $P_{S\to S'}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Рассмотрим теперь, как преобразуются координаты произвольного вектора в линейном пространстве при переходе от старого базиса к новому.

Теорема. Пусть X$=\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)_S$, и $X' = (x_1', \ldots . x_n')_{S'}$ - координаты вектора $\overline{x}$ в базисах S и S' соответственно, P – матрица перехода от базиса S к базису S'. Тогда $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P^{-1}_{S\to S'} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, или $X' = \mathbf{P^{-1}_{S\to S'}} \cdot \mathbf{X}$.

Пусть $S = \{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}\}$; $S' = \left\{\overline{f_1}, \overline{f_2}, \ldots, \overline{f_n}\right\}$;

$\overline{f}_1 = (a_{11} \ldots \ldots a_{n1})$;…$\overline{f}_n = (a_{1n} \ldots \ldots . a_{nn})$;- координаты S' в базисе S.

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_S = X; \quad \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}_{S'} = X'$$

$\overline{x} = X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix}_{S'} = x_1'\overline{f}_1 + \cdots + x_n'\overline{f}_n =$ { представим $\overline{f}_1, \ldots \overline{f}_n$ координатами в базисе S} $= x_1' \begin{pmatrix} a_{11} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix}_S + \ldots + x_n' \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \ldots \\ a_{nn} \end{pmatrix}_S = \begin{pmatrix} x_1' a_{11} + \cdots + x_n' a_{1n} \\ \ldots \\ x_1' a_{n1} + \cdots + x_n' a_{nn} \end{pmatrix}_S$

$= \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix}_{S'} = P_{s\to s'} X' = X$ (так как каждая строка – координата в базисе S) => $X' = P^{-1}_{S\to S'} \cdot \boldsymbol{X}$. ▶

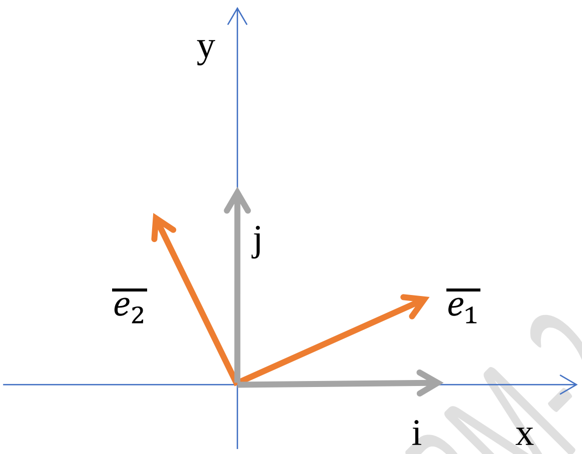
Это формула преобразования координат при замене базиса.

Пример 1. В линейном пространстве V_3 $\vec{x} = i - 2j + 2k$; $\overline{f}_1 = i + j$; $\overline{f}_2 = i - j$; $\overline{f}_3 = -i + 2j - k$. Доказать, что $\{\overline{f}_1; \overline{f}_2; \overline{f}_3\}$ образуют базис в V_3 и найти координаты $\vec{x}$ в этом базисе.

1. Выпишем матрицу перехода P$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; det P=2$\neq 0$ => $\overline{f}_1$; $\overline{f}_2$; $\overline{f}_3$ л.н.з., а также известно, что dim V_3=3 =>$\{\overline{f}_1; \overline{f}_2; \overline{f}_3\}$- базис в V_3

$$2.\, X' = P^{-1}\cdot X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -3\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\ -3/2\\ -2\end{pmatrix}$$

Пример 2. В V_2 задан ортонормированный базис $\{\bar{i};\bar{j}\}$. Новый базис получается путем поворота старого базиса на угол φ против часовой стрелки. Найти координаты вектора $\vec{a} = \bar{i} + \bar{j}$ в новом базисе.



$$\overline{e_1} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix};\ \overline{e_2} = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$$

$P = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$; Координаты $\vec{a}$ в новом базисе:

$$X' = P^{-1}\cdot X = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi + \sin\varphi\\ -\sin\varphi + \cos\varphi\end{pmatrix}$$

2. *Линейные подпространства*

Определение. ***Линейным подпространством*** называется непустое подмножество H линейного пространства L, если оно само является линейным пространством относительно операций сложения и умножения на число, определенным в L.

Теорема. Для того, чтобы непустое подмножество H линейного пространства L было линейным подпространством, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in H \quad \vec{x} + \vec{y} \in H$ (замкнутость H относительно операции сложения);
2) $\forall\, \vec{x} \in H$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha\vec{x} \in H$ (замкнутость H относительно операции умножения на число).

Замечание. Из выполнения условий 1) и 2) следует, что:

$$\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in H \text{ и } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in H$$

Свойства подпространств:

1. Линейное пространство, состоящее из одного лишь нулевого вектора, является подпространством любого пространства.
2. Любое пространство является подпространством самого себя.

Примеры подпространств:

1) Векторы в пространстве V_3, параллельные заданной плоскости.
2) Векторы в пространстве V_3, параллельные заданной прямой.
3) Все симметрические матрицы в пространстве квадратных матриц.
4) Все верхне-треугольные (нижне-треугольные) матрицы в пространстве квадратных матриц.

Все эти множества являются подпространствами, так как они замкнуты относительно операций сложения и умножения на число, заданных в пространстве.

Пример множества, которое не является подпространством :

все вырожденные матрицы в M_{2x2}

Если взять две вырожденные матрицы $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $(\det A_1 = \det A_2 = 0)$, то их сумма

$A_1 + A_2 = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$,будет невырожденной матрицей, так как $\det B = 3$, следовательно данное множество не замкнутое, следовательно оно не является подпространством.

Теорема. Размерность любого подпространства не превосходит размерности всего пространства.

◄Пусть H-подпространство в L; dim L=n; dim H=k. Выберем базис в H, k л.н.з. векторов, рассмотрим эти векторы в L, они также будут л.н.з.=> k≤ $\dim L = n$. ►

Определение. Линейной оболочкой $l(X) = l(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)$ подмножества векторов $X = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k\}$ пространства L называется совокупность всевозможных линейных комбинаций элементов из X:

$$l(X) = \{\vec{x} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_k\vec{a}_k\} \mid \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k \in X, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}\,\}$$

Основные свойства линейной оболочки:

1. Линейная оболочка $L(X)$ содержит само множество X.
2. $L(X)$ является линейным подпространство пространства L.
3. Размерность линейной оболочки $l(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k)$ равна рангу системы векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k\}$.

Замечание. Нулевой вектор всегда принадлежит линейной оболочке.

Пример. Найти базис и размерность линейной оболочки, порожденной системой векторов: $\vec{a}_1 = (0; 1; 1; -1)$, $\vec{a}_2 = (1; 2; 0; 1)$, $\vec{a}_3 = (2; 3; -1; 3)$, $\vec{a}_4 = (-1; 0; 2; -3)$.

Решение. Любая максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ является базисом линейной оболочки, порожденной этой системой. Найдем такую подсистему. Для этого составим матрицу по столбцам из векторов данной системы и элементарными преобразованиями приведём матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Базис линейной оболочки состоит из двух векторов $\Rightarrow$ размерность линейной оболочки, порожденной системой векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ равна двум.

Выберем два вектора $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$; Можно доказать, что они линейно-независимы, следовательно образуют базис.

Теорема. Пусть H- подпространство в n-мерном линейном пространстве L. Если $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_k}\}$ - базис в H, дополнить до базиса L $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_k}, \dots \overline{e_n}\}$, то в базисе L все векторы из H, и только они, будут иметь координаты $x_{k+1} = \ldots = x_n = 0$.

◀Пусть H-подпространство в L. Рассмотрим $\overline{x} \in H => \overline{x} \in L; dimH = k$; Dim L=n; k$\leq n$;

1. Дополним базис H $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_k}\}$ до базиса L $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \dots, \overline{e_k}, \dots \overline{e_n}\}$.

Тогда $\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + \cdots + x_k\overline{e}_k = x_1\overline{e}_1 + \cdots + x_k\overline{e}_k + 0\overline{e}_{k+1} + \cdots + o\overline{e}_n =$ $(x_1; \ldots\ldots x_k; 0; \ldots 0)$.

2. Если $\overline{x} \in L$ и $\overline{x} = (x_1; \ldots\ldots x_k; 0; \ldots 0) = x_1\overline{e}_1 + \cdots + x_k\overline{e}_k + 0\overline{e}_{k+1} + \cdots + o\overline{e}_n = x_1\overline{e}_1 + \cdots + x_k\overline{e}_k => \overline{x} \in H$, так как разложим по базису в H. ▶