ЛЕКЦИЯ № 6.

Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса. Действия над линейными операторами. Ядро и образ линейного оператора. Обратный оператор.

1. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса

Пусть в линейном пространстве L заданы два базиса $S_1 = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ и $S_2 = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$ и $\widehat{\boldsymbol{A}}: L \to L$ – линейный оператор. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Матрицы A и A' линейного оператора $\hat{A}: L \to L$, записанные в базисах S_1(старый базис) и S_2(новый базис) соответственно, связаны формулой:

$$\boldsymbol{A' = P^{-1}AP,}$$

где P - матрица перехода от старого базиса S_1 к новому базису S_2.

◀

Пусть $\vec{y}=\hat{A}\vec{x}$.

В координатах в базисе S_1: $\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}_{s_1} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{s_1}$

В координатах в базисе S_2: $\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}_{s_2} = A' \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}_{s_2}$.

Координаты вектора в разных базисах связаны формулой: $X = PX'$ =>

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{s_1} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}_{s_2} ; \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}_{s_1} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}_{s_2}$$

Тогда $\mathrm{P}\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}_{s_2} = \mathrm{A}\cdot\mathrm{P}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}_{s_2}$ Умножим полученное равенство слева на матрицу P^{-1}:

$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}_{s_2} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}_{s_2} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}_{s_2} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}_{s_2}$, так как $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}=\mathrm{E}$;

$\Rightarrow\ A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$; т.е.

$$\boldsymbol{A' = P^{-1} \cdot A \cdot P}$$

►

Утверждение. Определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

◄ $\det(P^{-1}\cdot A\cdot P) = \det P^{-1}\cdot \det A\cdot \det P = \det A$, т.к. $\det P^{-1}\cdot \det P = 1$ ►

Задача. Линейный оператор $\hat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ имеет матрицу $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Найти матрицу оператора в базисе $S' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, если $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\overrightarrow{f_3} = -2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$.

Решение: Выпишем матрицу перехода от старого базиса S к новому S', записав координаты нового базиса в старом $\vec{f}_1 = (1; 0; -2)$, $\overrightarrow{f_2} = (-1; 1; 1)$, $\overrightarrow{f_3} = (-2; 2; 3)$ в столбцы матрицы:

$$P_{S\to S'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу $P^{-1}_{S\to S'}$:

$$\Delta = |P_{S\to S'}| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 + 0 - 4 - 0 - 2 = 1 \neq 0 \;\Rightarrow$$

$$P^{-1}_{S\to S'} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$P_{S\to S'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

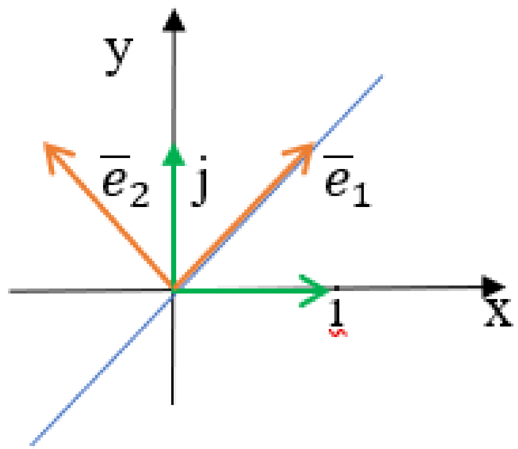
$$A' = P_{S\to S'}^{-1} A P_{S\to S'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -7 & -2 & -3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица оператора $\widehat{\boldsymbol{A}}$ в базисе $S' = \{\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$.

Задача. $\widehat{A}$ в V_2- оператор проектирования на прямую y = x. Составить матрицу линейного оператора в удобном базисе и в базисе $\{i, j\}$.

Решение:



базис канонический S_2: {i, j}

удобный базис S_1: $\overline{e}_1 = i + j = (1, 1)_{S_2}$; $\overline{e}_2 = -i + j = (-1, 1)_{S_2}$

$$P_{S_2\to S_1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix};\ P_{S_1\to S_2}=P_{S_2\to S_1}{}^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}5, & 0{,}5\\ -0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix};$$

$$A_{S_1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \text{так как}\ \hat{A}\overline{e}_1=(1,0)_{S_1};\ \hat{A}\overline{e}_2=(0,0)_{S_1}$$

$$A_{S_2}=(P_{S_1\to S_2})^{-1}A_{S_1}P_{S_1\to S_2}==P_{S_2\to S_1}A_{S_1}(P_{S_1\to S_2})^{-1}=$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0{,}5, & 0{,}5\\ -0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}5, & 0{,}5\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}$$

2. Действия над линейными операторами

Пусть L-линейное пространство. $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ линейные операторы: $L \to L, \alpha \epsilon \mathbb{R}$.

Определение.

- Суммой $\widehat{A} + \widehat{B}$ называется оператор, действующий по правилу:

$$(\widehat{A} + \widehat{B})\vec{x} = \widehat{A}\,\vec{x} + \widehat{B}\vec{x};$$

- Произведением $\widehat{A} \cdot \widehat{B}$ называется оператор, действующий по правилу:

$$(\widehat{A} \cdot \widehat{B})\,\vec{x} = \widehat{A}(\widehat{B}\,\vec{x});$$

- Произведением $\alpha\widehat{A}$ называется оператор, действующий по правилу:

$$(\alpha\widehat{A})\,\vec{x} = \alpha(\widehat{A}\,\vec{x}).$$

Теорема 4. Определенные таким образом операторы $\widehat{A}+\widehat{B}$; $\widehat{A}\cdot\widehat{B}$, $\alpha\widehat{A}$ являются линейными операторами.

◀ Докажем для $\widehat{A}\cdot\widehat{B}=\widehat{C}$;

$\widehat{C}(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\widehat{A}\cdot\widehat{B}(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\widehat{A}(\widehat{B}(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}))=$

$\widehat{A}(\alpha\widehat{B}\vec{x}+\beta\widehat{B}\vec{y})=\alpha\widehat{A}\widehat{B}\vec{x}+\beta\widehat{A}\widehat{B}\vec{y}=\alpha\widehat{C}\vec{x}+\beta\widehat{C}\vec{y}$ =>

$\widehat{A}\cdot\widehat{B}$ – линейный оператор. ▶

Теорема 5. Пусть линейные операторы $\widehat{\mathrm{A}}$ и $\widehat{B}$ в конечномерном линейном пространстве L в базисе S имеют матрицы A и B соответственно. Тогда линейные операторы $\widehat{\mathrm{A}}+\widehat{B}$; $\widehat{\mathrm{A}}\cdot\widehat{B}$, $\alpha\widehat{\mathrm{A}}$ имеют матрицы A+B, AB, αA соответственно.

◄ Докажем для $\widehat{\mathrm{A}}\cdot\widehat{B}=\widehat{C}$: Пусть $\overline{z}=\widehat{\mathrm{A}}\cdot\widehat{B}\vec{x}$; $\overline{y}=\widehat{B}\vec{x}$; : $\overline{z}=\widehat{\mathrm{A}}\,\overline{y}$; Тогда

$$\overline{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix}=\mathrm{A}\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix};\ \text{где } \overline{y}=\mathrm{B}\vec{x};\ =>$$

$$\overline{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix}=\mathrm{A}\cdot\left(B\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)=AB\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}=>$$

линейный оператор $\widehat{\mathrm{A}}\cdot\widehat{B}$ имеет матрицу AB. ►

Задача. Вычислить: $\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}^n$

Решение. Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$ как матрицу линейного оператора – поворот на угол φ против часовой стрелки. Тогда $\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}^n$ - это матрица оператора поворота на угол φ против часовой стрелки n раз, то есть поворота на угол (nφ), а она равна $\begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & cos(n\varphi) \end{pmatrix}$ =>

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n\varphi) & -\sin(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) & \cos(n\varphi) \end{pmatrix}$$

Задача. В каноническом базисе пространства R^3 заданы линейные операторы: $\hat{A}\vec{x} = (x_1 - x_2, x_1 - x_3, x_2 - x_3)$; $\hat{B}\vec{x} = (x_1 + x_3, x_1 + x_2, x_2 + x_3)$;

Найти линейный оператор $\hat{C} = 2\hat{A} - \hat{B}\hat{A}$ и образ вектора $\overline{a}$=(1,-2,3)

Решение:

Найдем матрицы данных линейных операторов.

A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

2A-BA=2$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{C}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -2x_2 & +x_3 \\ & x_2 & -x_3 \\ -x_1 + & x_2 & \end{pmatrix}$$

Можно записать так: $\hat{C}\vec{x} = (x_1 - 2x_2 + x_3, x_2 - x_3, -x_1 + x_2)$.

$$\overline{y}=\hat{C}\vec{a}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

3.Обратный оператор.

Определение. Оператор $\widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}$ ***называется обратным*** к линейному оператору $\hat{A}$, действующему в пространстве L, если $\widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{A}}^{-1} = \widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}\widehat{\boldsymbol{A}} = \vec{\boldsymbol{I}}$ **,**
где $\vec{I}$-тождественный оператор ($\vec{I}\vec{x} = \vec{x}$).
Таким образом, $\widehat{\boldsymbol{A}}\left(\widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}\vec{\boldsymbol{x}}\right) = \widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}\left(\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{\boldsymbol{x}}\right) = \vec{\boldsymbol{I}}\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{x}} \;\; \forall\vec{x} \in L$
Если $\vec{y} = \widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x} \;\Rightarrow\; \widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}\vec{y} = \vec{x}$.

Теорема 6. Если $\widehat{A}$ линейный оператор: $L \to L$ и $\widehat{A}^{-1}$ существует, то $\widehat{A}^{-1}$- линейный оператор и имеет матрицу A^{-1}.

◀

1.Пусть $\overline{y}_1 = \hat{A}\overline{x}_1$; $\overline{y}_2 = \hat{A}\overline{x}_2$;

и так как $\widehat{A}^{-1}\exists$; $\overline{x_1} = \hat{A}^{-1}\overline{y}_1$; $\overline{x_2} = \hat{A}^{-1}\overline{y}_2$;

В силу линейности $\hat{A}$

$$\hat{A}(\alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2) = \alpha\hat{A}(\overline{x}_1) + \beta\hat{A}(\overline{x}_2) = \alpha\overline{y}_1 + \beta\overline{y}_2;$$

Тогда $\hat{A}^{-1}(\alpha\overline{y}_1 + \beta\overline{y}_2) = \alpha\overline{x}_1 + \beta\overline{x}_2 = \alpha\hat{A}^{-1}(\overline{y}_1) + \beta\hat{A}^{-1}(\overline{y}_2) \Rightarrow$ $\hat{A}^{-1}$- линейный оператор .

2. $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \overline{I} \Rightarrow AA' = E$ – единичная матрица; где A'- матрица обратного оператора $\Rightarrow A' = A^{-1}$ ▶

Теорема ***(о прообразе нулевого вектора).*** Если линейный оператор $\widehat{\boldsymbol{A}}$ имеет обратный, то из равенства $\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x} = \vec{0}$ следует, что $\vec{x} = \vec{0}$.

◀ Из $\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x} = \vec{0}$ следует, что $\widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}\left(\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}\right) = \widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}\vec{0} = \vec{0}$.

Так как $\forall \vec{x} \in L$ $\widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x} = \widehat{\boldsymbol{I}}\vec{x} = \vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$. ▶

Определение. Линейный оператор $\widehat{\boldsymbol{A}}: L \to L$ называется ***взаимно однозначным***, если он два различных вектора $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ преобразует в различные векторы $\vec{y}_1 = \widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_1$ и $\vec{y}_2 = \widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_2$. Другими словами, каждый вектор $\vec{y} \in L$ представляет собой образ единственного вектора $\vec{x} \in L$.

Определение. Оператор, у которого существует обратный, называется обратимым.

Теорема *(об обратном операторе).* Линейный оператор $\widehat{\boldsymbol{A}}$: $L \to L$ обратим тогда и только тогда, когда он взаимно однозначный.

Теорема 7 (критерий существования обратного оператора).
Пусть $\widehat{\mathrm{A}}$ линейный оператор: $L \to L$, $\hat{A}^{-1}$ существует $\Leftrightarrow$ det A$\neq$ 0.

Примеры :

1) Нулевой оператор $\widehat{\boldsymbol{O}}$: $L \to L$ не имеет обратного.
2) Тождественный оператор $\hat{\boldsymbol{I}}$: $L \to L$ имеет обратный, причем $\hat{\boldsymbol{I}}^{-1} = \hat{\boldsymbol{I}}$

3) Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}: V_3 \to V_3$ - гомотетия с коэффициентом k имеет обратный $\hat{\boldsymbol{A}}^{-1}$ - гомотетия с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

4) Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}: V_2 \to V_2$ - поворот на угол φ против часовой стрелки имеет обратный $\hat{\boldsymbol{A}}^{-1}: V_2 \to V_2$ - поворот на угол φ по часовой стрелки.

5) Оператор $\hat{\boldsymbol{A}}: V_3 \to V_3$ −проектирование на ось OX не имеет обратного.

4.Ядро и образ линейного оператора, их свойства.

Определение. ***Образом линейного оператора*** $\widehat{\boldsymbol{A}}$ называется множество $\mathbf{Im}\,\widehat{\boldsymbol{A}}$ всех векторов L , таких что, для любого $\vec{y} \in \mathrm{Im}\,\widehat{A}\ \exists \vec{x} : \ \hat{A}(\vec{x}\,) = \vec{y}$.

Определение . ***Ядром линейного оператора*** $\widehat{\boldsymbol{A}}$ называется множество $\mathbf{Ker}\widehat{\boldsymbol{A}}$ всех векторов L , таких что, для любого $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\hat{A}$, $\widehat{\boldsymbol{A}}(\vec{\boldsymbol{x}}\,) = \vec{\mathbf{0}}$.

Пусть A - матрица линейного оператора $\hat{A}$ в некотором базисе. Тогда $\mathrm{Ker}\,\widehat{A}$ является решением однородной системы $A\vec{x} = \vec{0}$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \quad AX = O, \text{ где } O = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 8. Ядро и образ линейного оператора, действующего в L, являются линейными подпространствами пространства L.

◀

1. Пусть $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \operatorname{Ker} \widehat{\boldsymbol{A}} \Rightarrow \widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_1 = \widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_2 = \vec{0}$.

$\widehat{\boldsymbol{A}}(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) = \alpha\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_1 + \beta\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 \in \operatorname{Ker} \widehat{\boldsymbol{A}}$.

Следовательно, $\operatorname{Ker} \widehat{\boldsymbol{A}}$ - линейное подпространство в L.

2. Пусть $\vec{y}_1,\ \vec{y}_2 \in \operatorname{Im} \widehat{\boldsymbol{A}}$, тогда существуют прообразы этих векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L$, такие что $\vec{y}_1 = \widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_1$, $\vec{y}_2 = \widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_2$.

$\widehat{\boldsymbol{A}}(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) = \alpha\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_1 + \beta\widehat{\boldsymbol{A}}\vec{x}_2 = \alpha\vec{y}_1 + \beta\vec{y}_2 \in \operatorname{Im} \widehat{\boldsymbol{A}}$.

Линейная комбинация $\vec{y}_1,\ \vec{y}_2 \in \operatorname{Im}\widehat{\boldsymbol{A}}$, также принадлежит $\operatorname{Im}\widehat{\boldsymbol{A}}$ =>
$\operatorname{Im}\widehat{\boldsymbol{A}}$ - линейное подпространство в L ►

Определение. ***Рангом*** $Rang\,\widehat{\boldsymbol{A}}$ линейного оператора $\widehat{\boldsymbol{A}}$ называется размерность образа оператора:

$$Rang\,\widehat{\boldsymbol{A}} = \dim(\operatorname{Im}\widehat{\boldsymbol{A}}).$$

Определение. ***Дефектом*** $Defect\,\widehat{\boldsymbol{A}}$ линейного оператора $\widehat{\boldsymbol{A}}$ называется размерность ядра оператора:

$$Defect\,\widehat{\boldsymbol{A}} = \dim(\operatorname{Ker}\widehat{\boldsymbol{A}}).$$

Теорема 9. Ранг линейного оператора, действующего в линейном пространстве L совпадает с рангом его матрицы в каком либо базисе.

◄ Пусть в L задан базис S=$\{\overline{e}_1; \ldots \overline{e}_n\}$; запишем образы базисных векторов в матрицу A. r =RgA равен числу л.н.з. столбцов, которое равно числу л.н.з. векторов из $\{\hat{A}\overline{e}_1, \ldots \hat{A}\overline{e}_n\}$, которые и образуют базис Im$\hat{A}$: $\{\hat{A}\overline{e}_1, \ldots \hat{A}\overline{e}_r\}$=> $\dim(\mathrm{Im}\hat{A}) = \mathrm{Rang}(\hat{A}) = r$ ►

Утверждение. Ранг и дефект линейного оператора не зависят от выбора базиса.

Теорема 10. ***(о размерности ядра и образа оператора).*** Если $\widehat{\boldsymbol{A}} : L \to L$ - линейный оператор, то сумма размерностей образа и ядра оператора $\widehat{\boldsymbol{A}}$ равна размерности пространства L:

$$\boldsymbol{Rang}\,\widehat{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{Defect}\,\widehat{\boldsymbol{A}} = \mathbf{dim}\,\boldsymbol{L}.$$

***Следствие*.** Если $\mathrm{Ker}\,\widehat{\boldsymbol{A}} = \{\vec{0}\}$, то $\mathrm{Im}\,\widehat{\boldsymbol{A}} = L$ и наоборот.

Теорема 11. ***(критерии обратимости линейного оператора)***

1) Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L, обратим тогда и только тогда, когда его матрица в каком-либо базисе невырожденная (det A$\neq$ 0).
2) Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L, обратим тогда и только тогда, когда его образ совпадает со всем пространством L. $\mathrm{Im}\hat{A} = L$
3) Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в линейном пространстве L, обратим тогда и только тогда, когда его ядро тривиально, т.е. $\mathrm{Ker}\hat{A} = \{\vec{0}\}$.

Следствие. Для того чтобы оператор $\widehat{\boldsymbol{A}}$ имел обратный $\widehat{\boldsymbol{A}}^{-1}$ необходимо и достаточно, чтобы $Rang\ \widehat{\boldsymbol{A}} = \dim L$.

Примеры:

1) $\widehat{A}$ в V_3 –поворот на угол φ вокруг оси Oz. Определяем из геометрических соображений: Ker$\hat{A} = \{\vec{0}\}$; Im$\hat{A} = L$; => $\hat{A}$ обратим; Обратный оператор- поворот на угол φ вокруг оси Oz по часовой стрелке.

2) $\widehat{A}$ в V_3 – оператор проектирование на ось OX.
Из геометрических соображений:
Ker$\hat{A} = \{\alpha\vec{j} + \beta\vec{k}\}$; Im$\hat{A} = \{\gamma\vec{i}\}$; => нет обратного оператора.

3) $\widehat{A}\vec{x}=(x_1 + x_2 - 3x_3, 2x_1 - x_2 + x_3, x_2 + 5x_3)$: $R^3 \to R^3$

матрица линейного оператора A: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

det A= -22$\neq$ 0 => $\widehat{\mathrm{A}}^{-1}$ существует. Его матрицей будет матрица, обратная к матрице линейного оператора $\hat{A}$, т.е.

$$A^{-1} = \frac{-1}{22}\begin{pmatrix} -6 & -8 & -2 \\ -10 & 5 & -7 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Явный вид обратного оператора:

$$A^{-1}\overline{x} = \frac{-1}{22}\begin{pmatrix} -6 & -8 & -2 \\ -10 & 5 & -7 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11}x_1 & +\frac{4}{11}x_2 & +\frac{1}{11}x_3 \\ \frac{5}{11}x_1 & -\frac{5}{22}x_2 & +\frac{7}{22}x_3 \\ -\frac{1}{11}x_1 & +\frac{1}{22}x_2 & +\frac{3}{22}x_3 \end{pmatrix}$$

Найдем ядро линейного оператора $\hat{A}$. Решим систему $\mathrm{A}\overline{x} = \overline{0}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix};$$

$x_3 = 0; x_2 = 0; x_1 = 0.$ Ker $\hat{A}$={(0,0,0)}={ $\overline{0}$}. Подтверждается вывод о том, что оператор обратим. Im $\widehat{A} = R^3$.

4) $\hat{A}\,(p(t)) = (t+2)p''(t) + p'(t)$ в пространстве P_2 многочленов степени не выше 2.

Найдем матрицу $\hat{A}$ в каноническом базисе:

$\hat{A}\overline{e}_0 = (t+2)\cdot(1)'' + 0 = (0,0,0);$

$\hat{A}\overline{e}_1 = (t+2)\cdot(t)'' + t' = 1 = (1,0,0);$

$\hat{A}\overline{e}_2 = (t+2)\cdot(t^2)'' + (t^2)' = 2(t+2) + 2t = (4,4,0);$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

det A= 0 => $\widehat{A}^{-1}$ не существует

Чтобы найти ядро $\hat{A}$, решим однородную систему уравнений:

AX=O; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; rang A=2; c=b=0; a −любое;

X=(a,0,0)= $a(1,0,0) = a$; => Ker$\hat{A} = \{p(t) = a\}$;

базис Ker$\hat{A}$ =1=(1,0,0); defect$\hat{A} = 1$.

Найдем $\operatorname{Im}\widehat{\mathrm{A}}$. $\overline{y} \in \operatorname{Im}\widehat{\mathrm{A}} => \overline{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$

$b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, то есть образ $\widehat{\mathrm{A}}$ совпадает с линейной оболочкой векторов $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $h_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, они линейно-независимы, а значит образуют базис образа линейного оператора, то есть $\operatorname{rang}\widehat{\mathrm{A}} = 2$, а $\operatorname{Im}\hat{A} = \{\overline{y} = (b + 4c) + 4ct\}$.

Проверим выполнение формулы $Rang\ \hat{A} + Defect\ \hat{A} = \dim L$

2+1=3. Верно.

Задача. Оператор Â действует в пространстве P_2 многочленов степени не выше второй. $\hat{A}p(t) = (t+1) \cdot p''(t) - 2p(t-1)$.

a) Показать линейность оператора.

b) Найти его матрицу в каноническом базисе пространства P_2.

Найти образ многочлена p(t)= $t^2 - 2t + 3$.

c) Найти ядро и образ линейного оператора Â .

d) Существует ли обратный оператор?

Решение: $\hat{A}p(t) = (t+1) \cdot p''(t) - 2p(t-1)$

а) Проверим линейность оператора:

1) $\hat{A}(p_1(t) + p_2(t)) = (t+1)(p_1(t) + p_2(t))'' - 2(p_1(t-1) + p_2(t-1)) =$

$= (t+1)(p_1''(t) + p_2''(t)) - 2p_1(t-1) - 2p_2(t-1) =$

$= (t+1)p_1''(t) - 2p_1(t-1) + (t+1)p_2''(t) - 2p_2(t-1)$

$= \hat{A}p_1(t) + \hat{A}p_2(t).$

2) $\hat{A}(\alpha p(t)) = (t+1)((\alpha p)''(t)) - 2\alpha p(t-1)) =$

$= \alpha((t+1)p''(t) - 2p(t-1)) = \alpha\hat{A}(p(t).$

Делаем вывод, что $\hat{A}$- линейный оператор.

b) Найдем матрицу оператора в каноническом базисе пространства P_2: $\hat{A}p(t) = (t+1)\cdot p''(t) - 2p(t-1)$

$$\vec{e}_0 = 1$$
$$\vec{e}_1 = t$$
$$\vec{e}_2 = t^2$$

$$\hat{A}\vec{e}_0 = (t+1)\cdot 1'' - 2 = -2 = (-2,0,0)$$
$$\hat{A}\vec{e}_1 = (t+1)\cdot (t)'' - 2(t-1) = -2t + 2 = (2,-2,0)$$
$$\hat{A}\vec{e}_2 = (t+1)\cdot (t^2)'' - 2(t-1)^2 = 2t + 2 - 2t^2 + 4t - 2$$
$$= -2t^2 + 6t = (0,6,-2).$$

Чтобы получить матрицу линейного оператора, записываем координаты образов базисных векторов в матрицу по столбцам .

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 6\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

Чтобы найти образ вектора, запишем его в координатной форме.

$$p(t)=t^2-2t+3=(3,-2,1).$$

$$\hat{A}p(t)=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 6\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\ 10\\ -2\end{pmatrix}=-2t^2+10t-10.$$

c) Чтобы найти ядро Â, решим однородную систему линейных уравнений AX=O:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$ rangA=3, система имеет решение

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathrm{Ker}\hat{A}=\{\overline{0}\}.$$

Найдем образ $\hat{A}$;

$$\hat{A}\mathrm{p(t)}=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} =$$

$a\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\6\\-2\end{pmatrix}$; $\mathrm{Im}\hat{A}$ совпадает с линейной оболочкой столбцов матрицы линейного оператора. $\mathrm{rang}\hat{A}=3$.

$\mathrm{Im}\hat{A}=\{\overline{y}=-2a+2b+t(-2b+6c)-2ct^2\}$.

Можно также сказать, что образом данного линейного оператора будет P_2.

е) Обратный оператор существует по всем трем критериям:

1) detA$\neq$ 0; 2) Ker$\hat{A}$=$\{\overline{0}\}$; 3) Im$\hat{A}$=$P_{2.}$

Проверим выполнение формулы $Rang\ \hat{A} + Defect\ \hat{A} = \dim L$

3+0=3. Верно.