ЛЕКЦИЯ № 4

Линейные подпространства. Решение задач.

Линейная зависимость и независимость непрерывных функций.

Задача 1. Проверить, является множество векторов
L=$\{\overline{x} = (a, 2a - 7b, b + 1)\}$ линейным подпространством в $\mathbb{R}^3$.

Решение:

1 способ

Пусть $\bar{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 - 7b_1 \\ b_1 + 1 \end{pmatrix} \in L; \bar{y} = \begin{pmatrix} a_2 \\ 2a_2 - 7b_2 \\ b_2 + 1 \end{pmatrix} \in L.$

$$\bar{x} + \bar{y} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 2a_1 - 7b_1 + 2a_2 - 7b_2 \\ b_1 + 1 + b_2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ 2(a_1 + a_2) - 7(b_1 + b_2) \\ (b_1 + b_2) + 2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $a = a_1 + a_2; b = b_1 + b_2.$

Тогда $\bar{x}+\bar{y}=\begin{pmatrix} a \\ 2a-7b \\ b+2 \end{pmatrix} \notin L$, так как имеет другой общий вид. Аксиома замкнутости относительно операции сложения не выполнена => L не является подпространством.

2 способ

Для того, чтобы доказать, что множество не является подпространством , достаточно доказать, что оно не содержит нулевой элемент.

$(a, 2a-7b, b+1) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ 2a-7b=0 \\ b+1=0 \end{cases}$, данная система не имеет решений $\Rightarrow \overline{0} \notin L$ => L не является подпространством.

Задача 2. Проверить, является множество векторов $L=\{\overline{x}=(a,2a-7b,a+b)\}$ линейным подпространством в R^3. Если да, то найти базис и размерность этого подпространства. Дополнить базис подпространства L до базиса всего пространства R^3. Выписать матрицу перехода от канонического базиса пространства R^3 к построенному базису.

Решение

1) Пусть $\bar{x}=\begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1-7b_1 \\ a_1+b_1 \end{pmatrix}\in L;\ \bar{y}=\begin{pmatrix} a_2 \\ 2a_2-7b_2 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}\in L.$

$$\bar{x}+\bar{y}=\begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ 2(a_1+a_2)-7(b_1+b_2) \\ (a_1+a_2)+(b_1+b_2) \end{pmatrix}.$$

Обозначим $a = a_1 + a_2;\ b = b_1 + b_2$.

Тогда $\bar{x} + \bar{y} = \begin{pmatrix} a \\ 2a - 7b \\ a + b \end{pmatrix} \in L$. Аксиома замкнутости относительно операции сложения выполнена.

Пусть $\lambda \in R$. Тогда $\lambda\bar{x} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ 2\lambda a_1 - 7\lambda b_1 \\ \lambda a_1 + \lambda b_1 \end{pmatrix}$;

Обозначим $a = \lambda a_1; b = \lambda b_1$. Тогда $\lambda\bar{x} = \begin{pmatrix} a \\ 2a - 7b \\ a + b \end{pmatrix} \in L$.

Аксиома замкнутости относительно операции умножения на число выполнена.

Итак, L – линейное подпространство пространства R^3.

2) Найдем базис и размерность подпространства L:

Пусть $a = 1; b = 0 \Rightarrow \bar{e}_1 = (1,2,1)$

$a = 0; b = 1 \Rightarrow \bar{e}_2 = (0, -7, 1)$

Докажем, что $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ - базис подпространства *L*.

Линейная независимость.

Составим линейную комбинацию векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2$:

$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha - 7\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 0; \beta = 0 => \bar{e}_1, \bar{e}_2$ линейно независимая система векторов.

Другой способ доказать линейную-независимость:

Составим матрицу из координат векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ в каноническом базисе R^3 и найдем ее ранг: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 1 \end{pmatrix}, rang = 2(\textit{количеству векторов}) \Rightarrow \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ – линейно независимая система векторов.

Полнота.

$$\forall \bar{x} \in L: \bar{x} = \begin{pmatrix} a \\ 2a - 7b \\ a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -7b \\ b \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$a \cdot \bar{e}_1 + b \cdot \bar{e}_2. \Rightarrow \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$- полная система векторов.

Итак, $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ - базис подпространства L; $dim\ L$=2 (т.к. в базисе 2 вектора).

3) Дополним базис подпространства L до базиса всего пространства R^3.
Т.к. $dim\ R^3$=3, то нужно добавить еще один вектор такой, чтобы он образовывал линейно независимую систему с $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Добавим $\bar{e}_3 = (0,0,1)$.

Выпишем матрицу из координат $\{\overline{e}_1; \overline{e}_2; \overline{e}_3\}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

$rang = 3(\textit{количеству} \quad \textit{векторов})$, следовательно $\{\overline{e}_1; \overline{e}_2; \overline{e}_3\}$ – базис в R^3.

4) Выпишем матрицу перехода от канонического базиса пространства R^3 к построенному базису: $P_{\{канонич.базис\}\to\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, записав координаты базисных векторов по столбцам.

Задача 3. Проверить, что множество многочленов L=$\{p(t) = (a+2b)t^2 + at + b\}$ с вещественными коэффициентами образует линейное подпространство в линейном пространстве P_2 многочленов степени не выше 2. Найти размерность и базис L, дополнить его до базиса всего пространства P_2. Доказать, что многочлен h(t)=$t^2 + 3t - 1$ принадлежит подпространству L и найти его координаты в базисе подпространства L.

Решение.

1) Проверим, является ли L линейным подпространством в P_2. Для этого проверим выполнение аксиом замкнутости.

Пусть $x(t) = (a_1 + 2b_1)t^2 + a_1 t + b_1 \in L$;

$y(t) = (a_2 + 2b_2)t^2 + a_2 t + b_2 \in L$.

а) $x(t) + y(t) = (a_1 + 2b_1 + a_2 + 2b_2)t^2 + (a_1 + a_2)t + (b_1 + b_2)$.

Обозначим $a = a_1 + a_2; b = b_1 + b_2$.

Тогда $x(t) + y(t) = (a + 2b)t^2 + at + b \in L$.

Аксиома замкнутости относительно операции сложения выполнена.

б) Пусть $\lambda \in R$; $\lambda x(t) = (\lambda a_1 + 2\lambda b_1)t^2 + (\lambda a_1)t + (\lambda b_1)$.

Обозначим $a = \lambda a_1,\ b = \lambda b_1$. Тогда

$\lambda x(t) = (a + 2b)t^2 + at + b \in L$.

Аксиома замкнутости относительно операции умножения на число выполнена. Итак, L – линейное подпространство в P_2.

2) Найдем базис и размерность подпространства L:

$a = 1, b = 0 \ \rightarrow \ e_1(t) = t + t^2$ =(0,1,1)

$a = 0, b = 1 \ \rightarrow \ e_2(t) = 1 + 2t^2$=(1,0,2)

Докажем, что $\{e_1(t), e_2(t)\}$ образуют базис в L.

Линейная независимость.

Составим линейную комбинацию многочленов $e_1(t), e_2(t)$:

$\alpha_1 e_1(t) + \alpha_2 e_2(t) = 0.$

$\alpha_1(t^2 + t) + \alpha_2(2t^2 + 1) = 0$

$(\alpha_1 + 2\alpha_2)t^2 + \alpha_1 t + \alpha_2 = 0 <=>$

$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \quad \alpha_1 = 0 \\ \quad \alpha_2 = 0 \end{cases}$; $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$

Следовательно, система многочленов $\{e_1(t), e_2(t)\}$ – линейно независима.

Другой способ доказательства линейной независимости векторов:

Составим матрицу из их координат в каноническом базисе:

$$e_1(t) = t + t^2 = (0,1,1)$$

$$e_2(t) = 1 + 2t^2 = (1,0,2)$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $rang = 2$(*количеству векторов*) $\Rightarrow \{e_1(t), e_2(t)\}$ – линейно независима.

Полнота. Для любого

$p(t) = (a + 2b)t^2 + at + b \in L$: $p(t) = a(t^2 + t) + b(2t^2 + 1)$

$p(t) = ae_1(t) + be_2(t)$ (раскладывается по базису). Следовательно, система многочленов $\{e_1(t), e_2(t)\}$ является полной.

Итак, $\{e_1(t), e_2(t)\}$ – базис подпространства *L*. *dim L*=2 (так как в базисе 2 многочлена).

3) Дополним базис подпространства L до базиса всего пространства P_2. Так как $dim\ P_2 = 3$, то нужно добавить еще один многочлен такой, чтобы он образовывал линейно независимую систему с многочленами $\{e_1(t), e_2(t)\}$.

Возьмём $e_3(t) = 1 = (1; 0; 0)$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; *rang* =3, следовательно, система многочленов $\{e_1(t), e_2(t), e_3(t)\}$ линейно независима, следовательно является базисом P_2.

Найдем координаты многочлена $h(t) = t^2 + 3t - 1$ в базисе $\{e_1(t), e_2(t)\}$.

$h(t) = ae_1(t) + be_2(t)$; $a(t^2 + t) + b(2t^2 + 1) = t^2 + 3t - 1$;

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ a = 3 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow h(t) = 3e_1(t) - e_2(t) \Rightarrow h(t) \in L$$

Проверка: $3e_1(t) - e_2(t) = 3(t^2 + t) - (2t^2 + 1) = t^2 + 3t - 1 = h(t)$

Задача 4. Является ли линейным подпространством в P_3 множество

$L = \{p(t) = at^3 + (a + b)t^2 + (b + 1)t\}$

Решение.

1 способ.

Найдем нулевой элемент. $at^3 + (a + b)t^2 + (b + 1)t \equiv 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a + b = 0 \\ b + 1 = 0 \end{cases}$$ Данная система не имеет решения =>

$\overline{0} \notin$L => L не является подпространством.

2 способ.

Проверим аксиому замкнутости.

Пусть $x(t) = a_1 t^3 + (a_1 + b_1)t^2 + (b_1 + 1)t \in L$,

$y(t) = a_2 t^3 + (a_2 + b_2)t^2 + (b_2 + 1)t \in L$,

$x(t) + y(t) = (a_1 + a_2)\, t^3 + ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2))t^2 + \big((b_1 + b_2) + 2\big)\, t \notin L$, так как имеет другой общий вид => L не является линейным подпространством.

Задача 5. Доказать, что множество многочленов степени не выше 3, удовлетворяющий условию p(t)⁝ $(t-1)^2$, является подпространством в P_3. Найти базис, размерность, дополнить до базиса всего пространства в P_3.

Решение. Для решения данной задачи необходимо найти общий вид элемента множества.

$$p(t) = (t-1)^2(at+b) = (t^2-2t+1)(at+b)$$
$$= at^3 + (b-2a)t^2 + (a-2b)t + b$$

Далее задача решается по стандартному алгоритму. Не составит труда доказать, что данное множество является линейным подпространством в P_3. Проще всего это сделать, представив его в координатном виде

$p(t)$=(b, $a-2b, b-2a, a$)

1) Пусть $x = (b_1, a_1-2b_1, b_1-2a_1, a_1) \in L$;

$$y = (b_2, a_2 - 2b_2, b_2 - 2a_2, a_2) \in L$$

$x + y = (b_1 + b_2, a_1 + a_2 - 2(b_1 + b_2), (b_1 + b_2) - 2(a_1 + a_2, a_1 + a_2).$

Обозначим $a = a_1 + a_2; b = b_1 + b_2$.

Тогда $x + y =$(b, $a - 2b, b - 2a, a)\in L$.

Аксиома замкнутости относительно операции сложения выполнена.

Пусть $\lambda \in R$; $\lambda x = (\lambda b_1, \lambda - 2\lambda b_1, \lambda b_1 - 2\lambda a_1, \lambda a_1)$

Обозначим $a = \lambda a_1,\ b = \lambda b_1$. Тогда

$\lambda x = (\mathrm{b}, a - 2b, b - 2a, a) \in L$.

Аксиома замкнутости относительно операции умножения на число выполнена.

Итак, L – линейное подпространство пространства P_3.

2) Найдем базис и размерность подпространства L:

$a = 1, b = 0 \ \rightarrow \ e_1 =(0,1,-2,1)= t - 2t^2 + t^3$

$a = 0, b = 1 \ \rightarrow \ e_2 = (1, -2,1,0) = 1 - 2t + t^2$

Докажем, что $\{e_1, e_2\}$ образуют базис в L.

Линейная независимость.

$\begin{pmatrix} 0\ 1 - 2\ 1 \\ 1 - 2\ 1\ 0 \end{pmatrix}$; $rang = 2$(*количеству векторов*) $\Rightarrow \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ – линейно независимая система векторов.

Полнота. Для любого

$p(t) =$(b, $a - 2b, b - 2a, a$)$= a(0,1,-2,1) + b(1,-2,1,0) = ae_1 + be_2$ => система многочленов $\{e_1, e_2\}$ является полной.

Итак, $\{e_1, e_2\}$ – базис подпространства L. $dim\ L$=2 (так как в базисе 2 многочлена).

3) Дополним базис подпространства L до базиса всего пространства P_3. Так как $dim\ P_3 = 4$, то нужно добавить еще два вектора таких, чтобы они образовывал линейно независимую систему с $\{e_1, e_2\}$.
Возьмём $e_3 = (0,0,1,0) = t^2$; $e_4 = (0,0,0,1) = t^3$;

Рассмотрим матрицу, составленную из координат векторов

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $rang\ =4$, следовательно, система многочленов $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

линейно независима, следовательно является базисом P_3.

Задача 6. Доказать, что множество M матриц, перестановочных с матрицей $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ образует линейное подпространство в $M_{3\times 3}$. Найти базис и размерность этого подпространства. Проверить, что матрица $B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\in M$ и разложить ее по построенному базису.

Решение.

Найдем общий вид матриц X множества М из условия: $AX=XA$.

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & j \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} d = g = h = 0 \\ a = e = j \\ b = f \\ c - \text{любое} \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

Докажем, что M - линейное подпространство.

а) Пусть $X = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} \in M,\ Y = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \in M$

$$X + Y = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \\ 0 & a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

если обозначить $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2, c = c_1 + c_2 \Rightarrow X + Y \in M$

Следовательно, множество М замкнуто относительно операции сложения.

b) $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda X = \lambda \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 & \lambda c_1 \\ 0 & \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ 0 & 0 & \lambda a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$,

если обозначить $a = \lambda a_1, b = \lambda b_1, c = \lambda c_1 \Rightarrow \lambda X \in M$

Следовательно, множество М замкнуто относительно операции умножения на число.

На основании а) и б) делаем вывод, что М – линейное подпространство в пространстве матриц $M_{3\times3}$.

Любую матрицу $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in M$ можно представить в виде:

$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_1} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_2} +$$

$$c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_3} \Rightarrow$$

Тогда матрицы E_1, E_2, E_3 образуют полную группу в подпространстве М.

Покажем, что матрицы E_1, E_2, E_3 линейно независимые. Рассмотрим матрицу, составленную из столбцов координат матриц E_1, E_2, E_3 в каноническом базисе:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow rang = 3 \Rightarrow$$

$\{E_1, E_2, E_3\}$ −линейно независимая система матриц $\Rightarrow$

$\{E_1, E_2, E_3\}$ – базис в М и $\dim M = 3$.

Чтобы доказать, что $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$, достаточно разложить матрицу В по построенному базису

$$B = aE_1 + bE_2 + cE_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow B = E_1 + 2E_2 - E_3 \Rightarrow B \in M$$

Замечание. При решении задач в пространстве матриц можно использовать координатную форму записи.

Задача 7. Доказать, что множество геометрических векторов M, удовлетворяющих условию $(\overline{x},\overline{v})$=0, где $\overline{v} = (1,-3,-1)$ является линейным подпространством в V_3. Найти базис, размерность. Проверить , что вектор $\overline{x_,} = (1,2,-5) \in M$ и разложить его по найденному базису. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.

Решение: Найдем общий вид вектора $\overline{x} \in M$; пусть $\overline{x}$=(a,b,c);

$(\overline{x},\overline{v})$ = a - 3b-c=0; => c= a-3b; Тогда $\overline{x}$ = (a,b, a-3b). Мы нашли общий вид вектора $\overline{x} \in M$.

Далее задача решается аналогично задаче 1.

Более интересно рассмотреть, как решается данная задача исходя из геометрического смысла.

Геометрически подпространство М является множеством векторов плоскости, перпендикулярной вектору $\overline{v}$. Выполнение аксиом замкнутости при этом очевидно, следовательно М является подпространством в V_3. dim M=2.

Любые два неколлинеарных вектора данной плоскости будут образовывать базис. Поэтому в качестве базиса можно взять любые два вектора, удовлетворяющие условиям: $\overline{e_1} \perp \overline{v}$; $\overline{e_2} \perp \overline{v}$ и $\overline{e_1} \nparallel \overline{e_2}$.

Например: $\overline{e_1} = (1,0,1)$; $\overline{e_2}$=$(0,1,-3)$;

Чтобы дополнить $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ до базиса V_3, надо добавить еще один вектор так, чтобы получилась тройка некомпланарных векторов. Можно выбрать в качестве $\overline{e_3} = \overline{v}$.

Задача 8. Доказать, что множество H геометрических векторов, удовлетворяющих условию $[\vec{x}, \vec{q}] = \overline{0}$, где $\vec{q} = (1; -2; -3)$ является линейным подпространством пространства V_3. Найти его базис и размерность. Проверить, что вектор $\vec{d} = (-2; 4; 6) \in H$ и разложить его по найденному базису. Дополнить базис подпространства до базиса всего пространства.

Решение.

1) Найдем общий вид векторов из множества H.

Из условия $[\vec{x}, \vec{q}] = \overline{0}$ можно сделать вывод , что множество Н – это векторы, коллинеарные вектору $\vec{q}$. Тогда общий вид вектора $\vec{x} \in H$:

$$\vec{x} = (a; -2a; -3a)$$

2) Докажем, что H - линейное подпространство.

Пусть $\vec{x} = (a_1; -2a_1; -3a_1) \in H$, $\vec{y} = (a_2; -2a_2; -3a_2) \in H$

а) $\vec{x} + \vec{y} = (a_1 + a_2; -2a_1 - 2a_2; -3a_1 - 3a_2) =$

$$= (a_1 + a_2; -2(a_1 + a_2); -3(a_1 + a_2) = (a; -2a; -3a),$$

если обозначить $a = a_1 + a_2 \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in H$

Следовательно, множество H замкнуто относительно операции сложения.

б) $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\vec{x} = (\lambda a_1; -2\lambda a_1; -3\lambda a_1) = (a; -2a; -3a)$,

если обозначить $a = \lambda a_1 \Rightarrow \lambda\vec{x} \in H$

Следовательно, множество H замкнуто относительно операции умножения на число.

На основании а) и б) делаем вывод, что H – линейное подпространство в V_3.

Можно было бы доказать данный факт исходя из геометрических соображений. Множество всех векторов, коллинеарных данному является линейным подпространством в V_3, так как оно замкнуто.

3) Найдем базис и размерность линейного подпространства H.

Рассмотрим произвольный вектор $\vec{x} \in H$:

$$\vec{x} = (a; -2a; -3a) = a(1; -2; -3) = a\vec{q} \;\Rightarrow$$

Система, состоящая из одного вектора $\{\vec{q}\}$ является полной в H.

Так как $\vec{q} \neq \vec{0} \Rightarrow \{\vec{q}\}$ – базис в линейном подпространстве $H \;\Rightarrow$

$$\dim H = 1$$

4) Вектор $\vec{d} = (-2; 4; 6) \in H$ так как $\vec{d} \parallel \vec{q}$

$$\vec{d}=\begin{pmatrix}-2\\4\\6\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\-2a=4\\-3a=6\end{cases}\Rightarrow a=-2\Rightarrow\vec{d}=-2\vec{q}$$

5) Дополним базис подпространства $\{\vec{q}\}$ до базиса V_3.
Так как известно, что $\dim V_3=3$, то нужно добавить два вектора так, чтобы система векторов была линейно независимой.

Пусть $\vec{e}_1=\vec{q}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

Составим матрицу из координат векторов $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$:

$$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\-2&0&1\\-3&0&0\end{pmatrix},\ \det P=-3\neq 0\Rightarrow \text{векторы линейно независимые}$$

$\Rightarrow\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ - базис V_3.

Линейная зависимость и независимость непрерывных функций.

Рассмотрим $C_{[a,b]}$ −пространство функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. Это бесконечномерное пространство.

Определение линейной зависимости функций. Система функций $S = \{f_1(t), \dots, f_n(t)\} \in C_{[a,b]}$ называется линейно зависимой, если найдутся такие числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in R$, не равные нулю одновременно, что $\lambda_1 f_1(t) + \dots + \lambda_n f_n(t) = 0$ при любом значении t, то есть

$$\lambda_1 f_1(t) + \dots + \lambda_n f_n(t) \equiv 0$$

***Определение линейной независимости функций*:**
Если $\lambda_1 f_1(t) + \cdots + \lambda_n f_n(t) \equiv 0$ возможно, только когда $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, то система функций $S = \{f_1(t), \ldots, f_n(t)\} \in C_{[a,b]}$ называется линейно независимой.

Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ определены на некотором интервале $x \in (a, b)$ и имеют производные до $(n-1)$-го порядка включительно.

Определение. *Определителем Вронского (вронскианом)* $W(x)$ системы функций $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ называется определитель вида:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Теорема *(Необходимое условие линейной зависимости функций).*
Если система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ линейна зависима на интервале (a, b), то ее определитель Вронского тождественно равен нулю на этом интервале ($W(x) = 0 \ \ \forall x \in (a, b)$).

Замечание. Обратное утверждение неверно. Определитель Вронского линейно *<u>независимой</u>* системы функций может быть тождественно равен нулю.

Теорема *(Достаточное условие линейной независимости функций).*
Если определитель Вронского $W(x)$ не равен тождественно нулю (не равен нулю хотя бы в одной точке интервала (a, b)), то функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ будут линейно независимыми.

Задача 10. Исследовать на линейную зависимость систему функций:

$\{x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x\}, \;\; x \in (-\infty, +\infty)$

Решение. Формулы гиперболических функций:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$(\operatorname{ch} x)^2 - (\operatorname{sh} x)^2 = 1, \qquad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

Используем в этой задаче определитель Вронского.
Пусть функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ определены на некотором интервале $x \in (a, b)$ и имеют производные до $(n-1)$-го порядка включительно.

Вычислим определитель Вронского для системы функций $\{x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x\}$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \\ 1 & \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ 0 & \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{vmatrix} = x(\operatorname{ch} x)^2 - x(\operatorname{sh} x)^2 = x \not\equiv 0$$

Следовательно, система функций $\{x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x\}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ линейно независимая.

Задача 11. Доказать линейную независимость системы функций:

$\{1, x, \sin x, \cos x\}$, $x \in \mathbb{R}$

Решение.

Вычислим определитель Вронского для системы функций $\{1, x, \sin x, \cos x\}$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & sin\,x & cos\,x \\ 0 & 1 & cosx & -sin\,x \\ 0 & 0 & -sin\,x & -cos\,x \\ 0 & 0 & -cos\,x & sin\,x \end{vmatrix}$$

$$= -(\sin x)^2 - (\cos x)^2 = -1 \neq 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R}$$

Следовательно, система функций $\{1, x, \sin x\,, \cos x\}$ – линейно независимая.

Задача 12. Исследовать на линейную независимость функции:
1; cos2t; $\boldsymbol{sin^2 t}$***,*** t∈ $(-\infty;+\infty)$.

Решение. Вычислим определитель Вронского для системы функций $\{1, cos2t, sin^2 t\}$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & cos2t & sin^2t \\ 0 & -2sin2t & sin2t \\ 0 & -4cos2t & 2cos2t \end{vmatrix} = -4sin2tcos2t+4sin2tcos2t \equiv 0$$

На основании полученного результата мы не можем сделать никакого вывода. Тогда попробуем выразить одну из функций через другие.

$sin^2t = \frac{1-cos2t}{2}$ при t∈ $(-\infty;+\infty)$. Таким образом существует нетривиальная линейная комбинация равная 0. А именно:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot cos2t - sin^2t = 0.$$

Теперь мы можем сделать вывод, что данные функции линейно зависимые.

Можно сказать, что линейная оболочка функций $\{1, cos2t, sin^2t\}$ образует линейное пространство размерностью 2. В качестве базиса можно выбрать, например, $\{1, cos2t\}$.

Задача 13.

Доказать, что множество функций L= $\{\alpha\, e^{t} + \beta\, e^{-t} + \gamma sht; \alpha, \beta \in R\}$ образует подпространство в линейном пространстве непрерывных функций. Найти его размерность и базис. Доказать, что функция *cht* принадлежит подпространству и разложить ее по базису.

Решение.

1.Проверим аксиомы замкнутости.

Пусть x(t)= $\alpha_1\, e^{t} + \beta_1\, e^{-t} + \gamma_1 sht$ и

y(t)= $\alpha_2\, e^{t} + \beta_2\, e^{-t} + \gamma_2 sht$ – элементы множества L. Тогда

x(t) + y(t) = $(\alpha_1+\alpha_2)\, e^{t} + (\beta_1+\beta_2)\, e^{-t} + (\gamma_1+\gamma_2) sht \in L$;

λ x(t)= $\lambda\alpha_1 e^{t} + \lambda\beta_1 e^{-t} + \lambda\gamma_1 sht \in L$

Делаем вывод, что L замкнуто, то есть образует линейное подпространство в пространстве непрерывных функций.

2. Заметим, что $sht = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2}$

Преобразуем общий вид функций, принадлежащих L.

f(t)= $\alpha\, e^t + \beta\, e^{-t} + \gamma \frac{e^t - e^{-t}}{2} = a\, e^t + b\, e^{-t}$

Таким образом , f(t)= $a\, e^t + b\, e^{-t}$, где a и b − действительные числа.

Рассмотрим функции $f_1 = e^t, f_2 = e^{-t}$

Система f_1, f_2 полная, так как $f(t) = af_1 + bf_2$.

Проверим данную систему на линейную независимость.

$$\begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -e^{-t}\, e^t - e^{-t}\, e^t = -2 \neq 0 \Rightarrow$$

f_1, f_2 линейно независимые, следовательно образуют базис в L.

dimL=2.

3. $cht = \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-t}}{2} = \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2 \Rightarrow cht \in L$

Задача 14.

Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 11x_4 = 0 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 + 14x_4 = 0 \end{cases}$$

Решение. Выпишем основную матрицу и элементарными преобразованиями строк приведем ее к ступенчатому виду

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -5 \\ 2 & 6 & 9 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & -11 \\ -1 & 4 & -1 & 14 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2R1 \\ -R1 \\ +R1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & -6 \\ 0 & 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +2R2 \\ -3R2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как $rang(A) = 2 < n$, где n=4 – число переменных, то система имеет бесконечно много решений.

Выберем базисный минор

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 & -5 \\ 1 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Пусть x_1, x_2– базисные переменные, а x_3, x_4 – свободные переменные.

Пусть $x_3 = C_1, x_4 = C_2$, $C_1, C_2 \in \boldsymbol{R}$

Полученная матрица соответствует системе двух уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Обратный ход.

Из последнего уравнения выразим $2x_2 = -x_3 - 3x_4 = -C_1 - 3C_2$, тогда

$$x_2 = -\frac{1}{2}C_1 - \frac{3}{2}C_2$$

Поднимаемся выше к первому уравнению. Подставляем полученные значения переменных x_2, x_3, x_4и выражаем x_1:

$$x_1 = -2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -2\left(-\frac{1}{2}C_1 - \frac{3}{2}C_2\right) - 4C_1 + 5C_2 = -3C_1 + 8C_2$$

Общее решение

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3C_1 + 8C_2 \\ -\frac{1}{2}C_1 - \frac{3}{2}C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 8 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C_1, C_2 \in \boldsymbol{R}.$$

$$\text{ФСР}=\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 8 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ФСР – это система линейно независимых решений; при этом любое решение системы можно представить в виде линейной комбинации ФСР. Таким образом совокупность решений данной системы представляет собой

линейное пространство размерностью 2. В качестве базиса можно выбрать ФСР.