



ЛЕКЦИЯ № 15

Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом ортогональных преобразований.

Рассмотрим метод приведения квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогональных преобразований.

Пусть E – n -мерное пространство. $S = \{\bar{e}_1; \dots \bar{e}_n\}$ – ортонормированный базис; $\varphi(\bar{x})$ – квадратичная форма, A – её матрица, симметричная. Рассмотрим линейный оператор $\hat{A}$ с этой матрицей. $\hat{A}$ будет самосопряженным, следовательно существует ортонормированный базис $S' = \{\bar{f}_1; \dots \bar{f}_n\}$, в котором матрица оператора $\hat{A}$, A' будет диагональной.



Матрица перехода $P_{S \rightarrow S'}$ переводит ортонормированный базис в ортонормированный, следовательно, матрица $P_{S \rightarrow S'}$ ортогональная,

$$P^{-1} = P^T. \text{ Тогда } A' = P^{-1}AP = P^TAP,$$

то есть, приводя матрицу оператора A к диагональному виду мы и квадратичную форму $\varphi(\bar{x})$ приведем к диагональному виду.

Такое преобразование $A' = P^TAP$, где P - ортогональная матрица, называют **ортогональным преобразованием**.

Теорема 13. Любая симметричная матрица ортогональным преобразованием приводится к диагональному виду.



Алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду методом ортогональных преобразований.

1) Составляем матрицу квадратичной формы. Находим собственные значения, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (вещественные числа), так как матрица симметричная и является матрицей некоторого самосопряженного линейного оператора.

2) Находим собственные векторы.

Рассмотрим два случая:

- собственные значения попарно различны:

в этом случае собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, образуют ортогональный базис, его необходимо преобразовать в ортонормированный базис.



- среди найденных собственных значений есть совпадающие:

в этом случае выбираем линейно независимую систему из p собственных векторов, где $p = \dim L$ и строим ортонормированный базис при помощи алгоритма ортогонализации Грама-Шмидта.

3) в найденном базисе из собственных векторов матрица квадратичной формы будет иметь диагональный вид. На главной диагонали будут стоять собственные значения.



Задача 1. Привести квадратичную форму к каноническому виду методом ортогональных преобразований.

$$\varphi(\bar{x}) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}; \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5 - \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$-\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = 0. \quad \lambda_1 = 3; \lambda_2 = 6; \lambda_3 = 9;$$

Находим собственные векторы, отвечающие собственным значениям.



$$\lambda_1 = 3$$

$$\begin{pmatrix} 6-3 & -2 & 2 \\ -2 & 5-3 & 0 \\ 2 & 0 & 7-3 \end{pmatrix} X = 0;$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$x_3 = C; x_1 = x_2 = -2C; \text{ При } C=1 \text{ получим } \bar{f}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 6$$

$$\begin{pmatrix} 6-6 & -2 & 2 \\ -2 & 5-6 & 0 \\ 2 & 0 & 7-6 \end{pmatrix} X = 0;$$



$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$x_3 = C; x_2 = C; x_1 = -C/2; \text{ При } C=1 \text{ получим } \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_3 = 9$$

$$\begin{pmatrix} 6-9 & -2 & 2 \\ -2 & 5-9 & 0 \\ 2 & 0 & 7-9 \end{pmatrix} X = 0;$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$x_3 = C; x_2 = -C/2; x_1 = C; \text{ При } C=1 \text{ получим}$$



$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \bar{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{ортогональные, так как}$$

λ_i - попарно различны. Можно проверить.

$$(\bar{f}_1, \bar{f}_2) = 0; (\bar{f}_1, \bar{f}_3) = 0; (\bar{f}_2, \bar{f}_3) = 0;$$

$$\|\bar{f}_1\|=3; \|\bar{f}_2\|=\frac{3}{2}; \|\bar{f}_3\|=3/2;$$

$$\text{Нормируем: } \bar{e}_1 = \frac{\bar{f}_1}{\|\bar{f}_1\|} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}; \bar{e}_2 = \frac{\bar{f}_2}{\|\bar{f}_2\|} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix};$$

$$\bar{e}_3 = \frac{\bar{f}_3}{\|\bar{f}_3\|} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$



В найденном ортонормированном базисе матрица квадратичной формы имеет вид:

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}; \Rightarrow \varphi(\bar{x}) = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2;$$

Выпишем преобразование координат: $X = PY$;

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$



Приведение кривой второго порядка к каноническому виду.

Задача 2. Написать каноническое уравнение кривой второго порядка, определить ее тип и найти каноническую систему координат.

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$$

Решение.

Выпишем матрицу квадратичной части. $A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix};$

$$\text{Det}(A - \lambda E) = (9 - \lambda)(6 - \lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 15\lambda + 50 = 0; \lambda_1 = 5; \lambda_2 = 10;$$

Заметим, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$.



Находим собственные векторы , соответствующие λ_1 и λ_2 , они будут ортогональны. Затем нормируем их.

$$\lambda_1 = 5$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 = 10$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix};$$



$\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ - ортонормированный базис из собственных векторов.

Матрица перехода $P_{i,j \rightarrow \overline{e}_1, \overline{e}_2} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix};$

Выпишем преобразование координат:

$$x = x' \frac{1}{\sqrt{5}} - y' \frac{2}{\sqrt{5}} = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

$$y = x' \frac{2}{\sqrt{5}} + y' \frac{1}{\sqrt{5}} = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

Данное преобразование соответствуют повороту системы координат на угол $\alpha = \arcsin(2/\sqrt{5})$ против часовой стрелки.

Перейдем к новым координатам:



Для квадратичной части справедливо :

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 = 5x'^2 + 10y'^2$$

Тогда получаем:

$$5x'^2 + 10y'^2 + 16\left(x' \frac{1}{\sqrt{5}} - y' \frac{2}{\sqrt{5}}\right) - 8\left(x' \frac{2}{\sqrt{5}} + y' \frac{1}{\sqrt{5}}\right) - 2 = 0;$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов имеем:

$$5x'^2 + 10y'^2 - \frac{40}{\sqrt{5}}y' - 2 = 0;$$

Выделим полный квадрат.

$$\frac{x'^2}{2} + \left(y' - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1;$$

$$y'' = y' - \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad x'' = x';$$

Данное преобразование соответствует сдвигу системы координат по оси OY' .



Получаем каноническое уравнение эллипса : $\frac{x''^2}{2} + y''^2 = 1;$

Найдем окончательное преобразование координат:

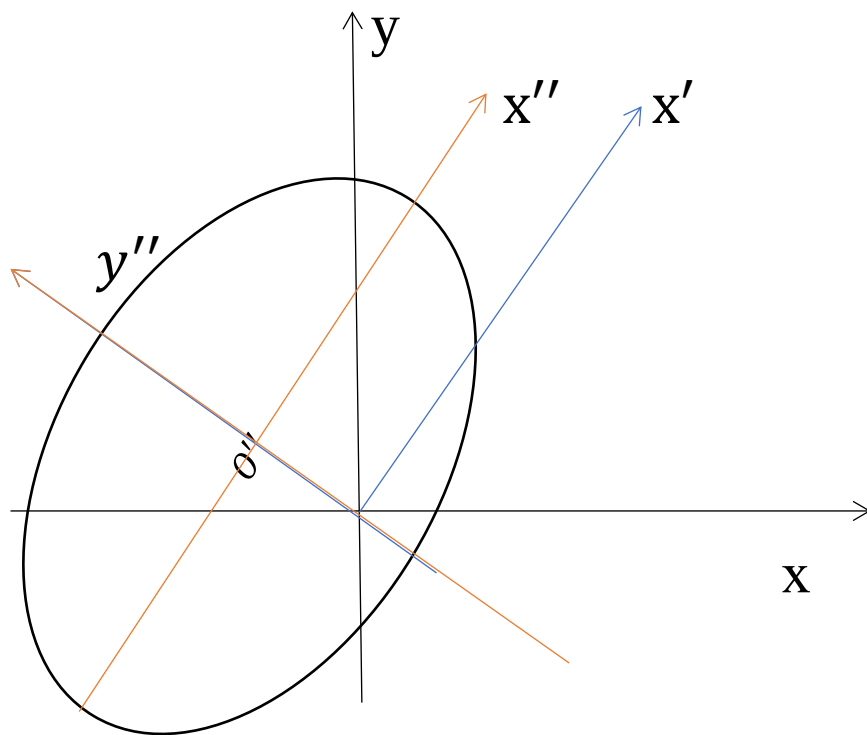
$$\begin{aligned}x &= x' \frac{1}{\sqrt{5}} - y' \frac{2}{\sqrt{5}} = x'' \frac{1}{\sqrt{5}} - (y'' + \frac{2}{\sqrt{5}}) \frac{2}{\sqrt{5}} \\y &= x' \frac{2}{\sqrt{5}} + y' \frac{1}{\sqrt{5}} = x'' \frac{2}{\sqrt{5}} + (y'' + \frac{2}{\sqrt{5}}) \frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

Окончательное преобразование координат выглядит так:

$$\begin{aligned}x &= x'' \frac{1}{\sqrt{5}} - y'' \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5}; \\y &= x'' \frac{2}{\sqrt{5}} + y'' \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{5};\end{aligned}$$



Новый центр системы координат $O''(\frac{-4}{5}; \frac{2}{5})$.





Задача 3. Ортогональным преобразованием привести квадратичную форму $\varphi(\vec{x}) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2$ (заданную в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$) к каноническому виду.

Решение. Выпишем матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдём собственные значения соответствующего самосопряженного линейного оператора:

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 & -1 \\ -2 & 2 - \lambda & -2 \\ -1 & -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda = 0$$



$-\lambda(\lambda^2 - 12\lambda + 36) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 6$ –
собственные значения.

Существует ортонормированный базис, в котором самосопряженный оператор, а значит и квадратичная форма, имеет диагональную матрицу вида:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Следовательно, квадратичная форма в этом базисе имеет канонический вид: $\varphi(\vec{x}) = 6y_2^2 + 6y_3^2$.

Найдем соответствующий базис из собственных векторов, а также связь между $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ – старыми координатами вектора $\vec{x}$ и его новыми координатами $Y = (y_1, y_2, y_3)^T$.



Собственные векторы, соответствующие собственным значениям, находятся из системы линейных однородных уравнений:

$$(A - \lambda E)X = 0$$

$$\begin{cases} (5 - \lambda)x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + (2 - \lambda)x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + (5 - \lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$x_1; x_2$ – базисные переменные; $x_3 = C$ – свободна;

$$x_2 = 2C; x_1 = x_2 - x_3 = C$$



$\lambda_1 = 0$ решение системы имеет вид: $X^1 = \begin{pmatrix} c \\ 2c \\ c \end{pmatrix} =$

$c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, c \in R$, получим собственный вектор $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, если $c = 1$.

При $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ матрица системы примет вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

система эквивалентна уравнению: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$, x_1 – базисная

переменная; x_2 и x_3 – свободные; $x_3 = c_1$; $x_2 = c_2$



решение имеет вид: $X^2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_1 - 2c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in R.$

Собственные векторы $\vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $\vec{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ линейно

независимы.

Следовательно, система векторов $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ образует базис.

Собственные векторы, отвечающие разным собственным значениям оператора ортогональны, а векторы $\vec{f}_2$ и $\vec{f}_3$ не ортогональны, так как их скалярное произведение не равно нулю: $(\vec{f}_2, \vec{f}_3) = 2 \neq 0.$

Ортогонализируем базис $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$, используя метод Грама-Шмидта:



$\vec{f}_1^* = \vec{f}_1$, $\vec{f}_2^* = \vec{f}_2$, $\vec{f}_3^* = \vec{f}_3 - \alpha \vec{f}_2^*$, где коэффициент α найдём таким, чтобы

$$(\vec{f}_2^*, \vec{f}_3^*) = 0.$$

$$(\vec{f}_2^*, \vec{f}_3^*) = (\vec{f}_2^*, \vec{f}_3 - \alpha \vec{f}_2^*) = (\vec{f}_2, \vec{f}_3) - \alpha (\vec{f}_2, \vec{f}_2) = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{(\vec{f}_2, \vec{f}_3)}{(\vec{f}_2, \vec{f}_2)} = 1 \Rightarrow \vec{f}_3^* = \vec{f}_3 - \vec{f}_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Получили ортогональный базис $F^* = \{\vec{f}_1^*, \vec{f}_2^*, \vec{f}_3^*\}$.

Нормируя его, найдём ортонормированный базис $H = \{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3\}$:

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{f}_1^*}{|\vec{f}_1^*|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad \vec{h}_2 = \frac{\vec{f}_2^*}{|\vec{f}_2^*|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \vec{h}_3 = \frac{\vec{f}_3^*}{|\vec{f}_3^*|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$



Составим матрицу перехода:

$$P_{\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \rightarrow \{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3\}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора $\vec{x}$ в старом и новом базисах связаны соотношениями:

$Y = P^{-1} \cdot X$ и $X = P \cdot Y$. Для ортогональной матрицы перехода верно

равенство: $P^{-1} = P^T$.

Проверка. Формула преобразования матрицы линейного оператора при замене базиса имеет вид:



$$A' = P^{-1}AP = P^T AP$$

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Исследование кривой второго порядка.

Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду.

$$4x^2 - 20xy - 11y^2 + 64x - 16y - 32 = 0$$

Решение:

Выделим квадратичную часть $\varphi(\vec{x}) = 4x^2 - 20xy - 11y^2$.

Матрица квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -10 & -11 \end{pmatrix}$.



Собственные значения и собственные векторы.

Характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -10 \\ -10 & -11 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(-11 - \lambda) - 100 = 0 \Leftrightarrow \\ \lambda^2 + 7\lambda - 144 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -16, \lambda_2 = 9.$$

$$\lambda_1 = -16 \Rightarrow (A - \lambda_1) = \begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2x - y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \text{собственный вектор с} \\ \text{собственным значением } \lambda_1 = -16.$$

$$\lambda_2 = 9 \Rightarrow (A - \lambda_2) = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -10 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x + 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2y \\ y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{собственный вектор с} \\ \text{собственным значением } \lambda_2 = 9.$$



Собственные векторы $\bar{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ и $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = -2 + 2 = 0 \Rightarrow \{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ – ортогональный базис. Нормируем его:

$$\begin{cases} |\bar{a}_1| = \sqrt{5} \\ |\bar{a}_2| = \sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\bar{h}_1| = \frac{\bar{a}_1}{|\bar{a}_1|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ |\bar{h}_2| = \frac{\bar{a}_2}{|\bar{a}_2|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$$

$G = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\}$ – собственный ортонормированный базис.

Матрица квадратичной формы в базисе $G = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\}$: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Перейдём к новым координатам $(u; v)$ с помощью матрицы перехода от исходного ортонормированного базиса $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ к собственному ортонормированному базису $G = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\}$:



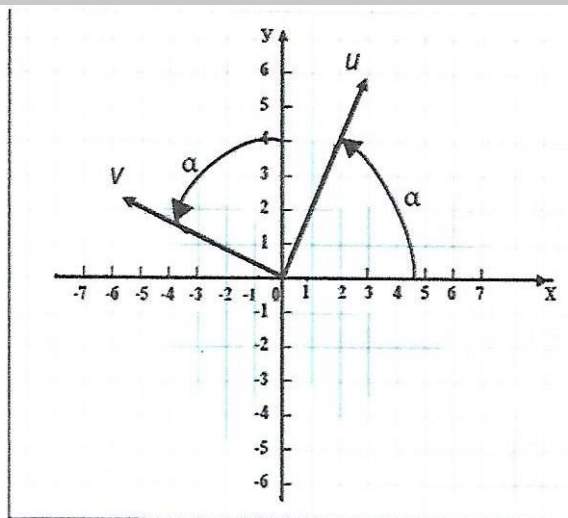
$$P_{\{\bar{l}, \bar{j}\} \rightarrow G} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}u - \frac{2}{\sqrt{5}}v \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}u + \frac{1}{\sqrt{5}}v \end{cases}$$

Это преобразование координат – поворот на угол α : $tg\alpha = \frac{2/\sqrt{5}}{1/\sqrt{5}} \Rightarrow$

$$\alpha = arctg 2,$$

Поворот против часовой стрелки (угол положительный) по y : 2 единицы, по x : 1 единица.



Важное замечание:

Преобразование координат при повороте против часовой стрелки

на угол α :

$$\begin{cases} x = u \cdot \cos \alpha - v \cdot \sin \alpha \\ y = u \cdot \sin \alpha + v \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

Итак, подставим $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(u - 2v) \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2u + v) \end{cases}$ в уравнение кривой :



$$\begin{aligned} & 4 \left(\frac{1}{\sqrt{5}} (u - 2v) \right)^2 - 20 \frac{1}{\sqrt{5}} (u - 2v) \frac{1}{\sqrt{5}} (2u + v) \\ & - 11 \left(\frac{1}{\sqrt{5}} (2u + v) \right)^2 + \\ & + 64 \frac{1}{\sqrt{5}} (u - 2v) - 16 \frac{1}{\sqrt{5}} (2u + v) - 32 = 0 \end{aligned}$$

В результате преобразований уничтожатся смешанные произведения переменных u и v :

$$\begin{aligned} & -16u^2 + 9v^2 + 32 \frac{1}{\sqrt{5}} u - 144v - 32 = 0 \\ & -16 \left(u^2 - \frac{2}{\sqrt{5}} u \right) + 9 \left(v^2 - \frac{16}{\sqrt{5}} v \right) - 32 = 0 \end{aligned}$$

Выделим полные квадраты по этим переменным:

$$-16 \left(u - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 + 9 \left(v - \frac{8}{\sqrt{5}} \right)^2 = 144,$$



Разделим обе части на (-144) и получим каноническое уравнение гиперболы со смещённым центром:

$$\frac{\left(u - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{9} - \frac{\left(v - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2}{16} = -1.$$
$$\frac{(u')^2}{9} - \frac{(v')^2}{16} = -1.$$

$$u' = u - \frac{1}{\sqrt{5}}; v' = v - \frac{8}{\sqrt{5}}$$

Центр $O_1\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{8}{\sqrt{5}}\right)$, полуоси: действительная $a = 4$; мнимая $b = 3$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$.

Выпишем окончательное преобразование координат



$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(u' + \frac{1}{\sqrt{5}} - 2 \left(v' + \frac{8}{\sqrt{5}} \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} u' - \frac{2}{\sqrt{5}} v' - 3 \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(2 \left(u' + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + \left(v' + \frac{8}{\sqrt{5}} \right) \right) = \frac{2}{\sqrt{5}} u' + \frac{1}{\sqrt{5}} v' + 2 \end{cases}$$

Координаты центра в исходной системе координат $O_1(-3; 2)$

Фокусы расположены на действительной оси гиперболы, параллельной оси переменной v .

