



ЛЕКЦИЯ № 14

Самосопряженные и ортогональные операторы.

Сопряженные и самосопряженные операторы

Определение. Линейный оператор $\hat{A}^* : E \rightarrow E$, где E – евклидово пространство, называется *сопряженным* линейному оператору \hat{A} , если для любых $\bar{x}; \bar{y} \in E$, верно равенство $(\hat{A}\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \hat{A}^*\bar{y})$.

Теорема 1. Любому линейному оператору \hat{A} в евклидовом пространстве соответствует единственный сопряженный оператор \hat{A}^* , причем его матрицей в любом ортонормированном базисе является матрица A^T , транспонированная к матрице A линейного оператора \hat{A} в том же базисе.



◀ Доказательство основано на том, что при фиксированном базисе существует взаимно однозначное соответствие между линейными операторами и матрицами $M_{n \times n}$.

Докажем, что линейный оператор \hat{B} с матрицей $B=A^T$ в некотором ортонормированном базисе является сопряженным к линейному оператору \hat{A} с матрицей A в том же базисе. Для этого достаточно проверить выполнения равенства

$$(\hat{A}\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \hat{B}\bar{y}) \quad (*)$$

для любой пары векторов $\bar{x}, \bar{y} \in E$.

Пусть X, Y – столбцы координат векторов \bar{x}, \bar{y} в некотором ортонормированном базисе e . Тогда координаты вектора $\hat{A}\bar{x}$ это вектор столбец AX , и тогда равенство (*) можно будет записать в матричном виде:

$$(AX)^T Y = X^T BY. \text{ Следовательно, } (X)^T (A)^T Y = X^T (BY). \text{ Следовательно, } X^T A^T Y = X^T BY \Rightarrow B=A^T.$$

И линейный оператор B определен однозначно, так как однозначно определена его матрица. ▶



Пример 1. Рассмотрим в V^3 линейный оператор $\hat{A}\bar{x} = [\bar{a}, \bar{x}]$ для некоторого вектора $\bar{a} \in V^3, \bar{a} \neq \bar{0}$. Оператор, сопряженный к \hat{A} , можно определить, опираясь на свойства скалярного, векторного и смешанного произведения.

$$\begin{aligned}(\hat{A}\bar{x}, \bar{y}) &= ([\bar{a}, \bar{x}], \bar{y}) = \bar{a} \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{a} \cdot \bar{x} = ([\bar{y}, \bar{a}], \bar{x}) = (\bar{x}, [\bar{y}, \bar{a}]) = \\ &= (\bar{x}, -[\bar{a}, \bar{y}]) = (\bar{x}, -\hat{A}\bar{y})\end{aligned}$$

Из приведенных соотношений видно, что $\hat{A}^* = -\hat{A}$

Определение. Линейный оператор \hat{A} , действующий в евклидовом пространстве, называется **самосопряженным**, если $\hat{A}^* = \hat{A}$, т.е.

$$(\hat{A}\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \hat{A}\bar{y})$$

Самосопряженный линейный оператор является сопряженным оператором к самому себе.



Примеры самосопряженных операторов:

1. \hat{O} , $(\hat{O}\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \hat{O}\bar{y}) = 0$

2. \hat{I} , $(\hat{I}\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \hat{I}\bar{y})$

3. $\hat{A}\bar{x} = \alpha\bar{x}$; $\alpha \in R$; $(\hat{A}\bar{x}, \bar{y}) = (\alpha\bar{x}, \bar{y}) = \alpha(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \alpha\bar{y}) = (\bar{x}, \hat{A}\bar{y})$

Теорема 2. В ортонормированном базисе матрица линейного оператора симметричная тогда и только тогда, когда он самосопряженный.

◀ \hat{A} –самосопряженный \Leftrightarrow тогда $\hat{A}^* = \hat{A}$. Это эквивалентно тому, что в ортонормированном базисе матрица линейного оператора совпадает со своей транспонированной матрицей. Такие матрицы и называются симметричными. ▶



Теорема 3. Все собственные числа самосопряженного оператора действительны.

◀ Докажем, что характеристическое уравнение симметричной матрицы имеет только действительные корни.

Рассмотрим характеристическое уравнение $\det(A-\lambda E) = 0$ и предположим, что некоторое число λ является его вообще говоря комплексным корнем. Тогда система $(A-\lambda E)X = 0$

имеет некоторое ненулевое решение: собственный вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$,

состоящее из комплексных чисел x_1, x_2, \dots, x_n . Рассмотрим столбец, состоящий из чисел

комплексно-сопряженных к x_k , $\bar{X} = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \dots \\ \overline{x_n} \end{pmatrix}$.

Рассмотрим систему: $\bar{X}^T (A-\lambda E)X = 0$;

$$\text{или } \bar{X}^T AX = \bar{X}^T \lambda EX = \lambda \bar{X}^T X (**)$$



Так как произведение комплексного числа на сопряженное к нему является действительным числом, равным квадрату модуля комплексного числа, а X - ненулевое решение, то

$$X^T X = x_1 \bar{x}_1 + \dots + x_n \bar{x}_n = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 > 0; \text{ т.е.}$$

$X^T X$ – действительное положительное число.

Из равенства (***) находим $\lambda = \frac{\bar{X}^T A X}{X^T X}$, где знаменатель – действительное число.

Рассмотрим числитель $z = \bar{X}^T A X$

В силу симметричности матрицы A :

$$z = z^T = (\bar{X}^T A X)^T = X^T A^T \bar{X} = X^T A \bar{X};$$

Рассмотрим число \bar{z} , сопряженное числителю и используем свойство операции комплексного сопряжения матриц и то, что A - симметричная матрица и ее элементы - действительные числа, получим:



$$\bar{z} = \overline{(\bar{X}^T A X)} = \bar{X}^T \bar{A} \bar{X} = X^T A \bar{X} = z.$$

Комплексное число, сопряженное самому себе, является действительным числом. Таким образом мы доказали, что и числитель является действительным числом, а следовательно все корни характеристического уравнения – действительные числа. ►

Следствие 1. Если матрица A является симметричной, то все корни ее характеристического уравнения – действительные.

Следствие 2. Самосопряженный оператор, действующий в n -мерном евклидовом пространстве, имеет n собственных значений, если каждое считать столько раз какова его кратность.

Следствие 3. Симметричная матрица порядка n имеет n собственных значений, если каждое считать столько раз какова его кратность.



Теорема 4. Собственные векторы самосопряженного линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

◀ Рассмотрим самосопряженный линейный оператор и два его собственных вектора \bar{x} и \bar{y} , отвечающие различным собственным значениям λ_1 и λ_2 .

Тогда $\hat{A}\bar{x} = \lambda_1\bar{x}$; $\hat{A}\bar{y} = \lambda_2\bar{y}$; и $(\hat{A}\bar{x}, \bar{y}) = (\lambda_1\bar{x}, \bar{y}) = \lambda_1(\bar{x}, \bar{y})$;

Так как \hat{A} - самосопряженный оператор, то

$$(\hat{A}\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \hat{A}\bar{y}) = (\bar{x}, \lambda_2\bar{y}) = \lambda_2(\bar{x}, \bar{y});$$

Приравняем правые части получившихся соотношений: $\lambda_1(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda_2(\bar{x}, \bar{y})$; \Rightarrow

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, из последнего равенства следует ортогональность \bar{x} и \bar{y} .





Теорема 5. Если собственные значения самосопряженного оператора, действующего в n -мерном евклидовом пространстве E попарно различны, то в E существует ортонормированный базис, в котором матрица линейного оператора имеет диагональный вид, причем на главной диагонали стоят собственные значения.

◀ Так как собственные значения линейного оператора различны, то согласно теореме 4 можно получить систему из n ненулевых ортогональных векторов, выбрав по одному собственному вектору для каждого собственного значения. Так как собственные вектора, отвечающие различным собственным значениям линейно-независимы, мы получим базис из n ортогональных векторов. Поделив каждый вектор на его длину, мы получим ортонормированный базис. ▶



А если собственные значения самосопряженного линейного оператора действительные, но среди них есть кратные?

Теорема 6. Для любого самосопряженного оператора \hat{A} существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов этого линейного оператора. Матрица A самосопряженного оператора в этом базисе имеет диагональный вид и на ее диагонали расположены собственные значения \hat{A} , повторяющиеся столько раз, какова их кратность.

(без доказательства)



Ортогональные матрицы

Определение. Квадратную матрицу Q называют ортогональной, если она удовлетворяет условию: $Q^T Q = E$, где E - единичная матрица.

Пример 2:

Матрица E – ортогональная.

Пример 3:

$U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ – ортогональная.

$$U^T U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$



Свойства ортогональных матриц:

1. Определитель ортогональных матриц может иметь одно из двух значений 1 или -1.

Доказательство: $\det(Q^T Q) = \det E = 1$; $\det(Q^T Q) = \det Q^T \det Q = (\det Q)^2 = \det E = 1 \Rightarrow \det Q = \mp 1$.

2. Матрица, обратная к ортогональной, совпадает с ее транспонированной матрицей, т.е. $Q^{-1} = Q^T$

Доказательство: Согласно свойству 1, ортогональная матрица невырожденная и поэтому имеет обратную.

Умножим $Q^T Q = E$ справа на Q^{-1} , получим: $(Q^T Q)Q^{-1} = EQ^{-1}$;

С другой стороны:

$$Q^T (QQ^{-1}) = Q^T \Rightarrow Q^T = Q^{-1} .$$



3. $QQ^T = E$

(следует из определения обратной матрицы)

4. Матрица, транспонированная к ортогональной, тоже ортогональная.

Доказательство:

Найдем $(Q^T)^T Q^T = QQ^T = E$

5. Произведение двух ортогональных матриц одного порядка является ортогональной матрицей.

Доказательство:

$$(UQ)^T UQ = (Q)^T (U)^T UQ = (Q)^T EQ = Q^T Q = E$$



6. Матрица, обратная к ортогональной, является ортогональной.

Доказательство: По свойству 1 ортогональная матрица является невырожденной и поэтому имеет обратную. Согласно свойству 2 матрица, обратная к ортогональной, совпадает с транспонированной. Согласно свойству 4 матрица, транспонированная к ортогональной является ортогональной.

Пример 4: Найти матрицу, обратную к матрице $U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$;

$$U^{-1} = U^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$



Ортогональные операторы

Определение. Линейный оператор \hat{A} , действующий в евклидовом пространстве называется ортогональным, если он сохраняет скалярное произведение, т.е.

$$(\hat{A}\bar{x}, \hat{A}\bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y}), \forall \bar{x}, \bar{y} \in E.$$

Очевидно, что он сохраняет и норму (длину) вектора.

Действительно, $\|\hat{A}\bar{x}\|^2 = (\hat{A}\bar{x}, \hat{A}\bar{x}) = (\bar{x}, \bar{x}) = \|\bar{x}\|^2 \Rightarrow$
$$\|\hat{A}\bar{x}\| = \|\bar{x}\|.$$

Отсюда следует, что если векторы ненулевые \bar{x} и \bar{y} ненулевые, то и $\hat{A}\bar{x}$ и $\hat{A}\bar{y}$ ненулевые.

При этом



$$\cos(\hat{A}\bar{x}, \hat{A}\bar{y}) = \frac{(\hat{A}\bar{x}, \hat{A}\bar{y})}{\|\hat{A}\bar{x}\| \|\hat{A}\bar{y}\|} = \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{\|\bar{x}\| \|\bar{y}\|} = \cos(\bar{x}, \bar{y})$$

Теорема 7. Если линейный оператор \hat{A} , действующий в евклидовом пространстве, сохраняет евклидову норму: $\|\hat{A}\bar{x}\| = \|\bar{x}\|, \forall \bar{x} \in E$, то этот оператор ортогональный.

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft \|\hat{A}(\bar{x} + \bar{y})\|^2 &= \left((\hat{A}\bar{x} + \hat{A}\bar{y}), (\hat{A}\bar{x} + \hat{A}\bar{y}) \right) = \|\hat{A}\bar{x}\|^2 + 2(\hat{A}\bar{x}, \hat{A}\bar{y}) + \\ \|\hat{A}\bar{y}\|^2 &\Rightarrow 2(\hat{A}\bar{x}, \hat{A}\bar{y}) = \|\hat{A}(\bar{x} + \bar{y})\|^2 - \|\hat{A}\bar{x}\|^2 - \|\hat{A}\bar{y}\|^2 = \\ &= \|\bar{x} + \bar{y}\|^2 - \|\bar{x}\|^2 - \|\bar{y}\|^2 = 2(\bar{x}, \bar{y}); \Rightarrow \hat{A} \text{ ортогональный.} \end{aligned}$$





Примеры ортогональных операторов:

В пространствах геометрических векторов V_2 и V_3 ортогональными являются линейные операторы, сохраняющие расстояние. Например, линейный оператор поворота на фиксированный угол или линейный оператор отражения относительно прямой или плоскости.



Теорема 8. Ортогональный оператор в Евклидовом пространстве переводит ортонормированный базис в ортонормированный.

◀ Пусть в n -мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$. В силу ортогональности \hat{A}

$$(\hat{A}\bar{e}_i, \hat{A}\bar{e}_j) = (\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Мы видим, что система векторов $\{\hat{A}\bar{e}_1, \dots, \hat{A}\bar{e}_n\}$ состоит из n ненулевых ортогональных векторов, следовательно она линейно независима. Кроме того все векторы имеют единичную длину, следовательно данная система образует ортонормированный базис.





Теорема 9.

Если линейный оператор, действующий в n -мерном евклидовом пространстве переводит какой-то ортонормированный базис в ортонормированный, то этот оператор ортогональный.

◀ Пусть $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ и $\{\hat{A}\bar{e}_1, \dots, \hat{A}\bar{e}_n\}$ - ортонормированные базисы.

Пусть $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ - координаты вектора в базисе $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$.

$\hat{A}\bar{x} = \hat{A}(x_1\bar{e}_1 + \dots + x_n\bar{e}_n) = x_1\hat{A}\bar{e}_1 + \dots + x_n\hat{A}\bar{e}_n \Rightarrow$ образ вектора \bar{x} -

$\hat{A}\bar{x}$ имеет те же координаты в базисе $\{\hat{A}\bar{e}_1, \dots, \hat{A}\bar{e}_n\}$.



Возьмем два произвольных вектора $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + \dots + x_n \bar{e}_n$ и $\bar{y} = y_1 \bar{e}_1 + \dots + y_n \bar{e}_n$. Их скалярное произведение в базисе $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ $(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. И такой же формулой выражается скалярное произведение $(\hat{A}\bar{x}, \hat{A}\bar{y})$ в ортонормированном базисе $\{\hat{A}\bar{e}_1, \dots, \hat{A}\bar{e}_n\}$. Поэтому, соотношение $(\hat{A}\bar{x}, \hat{A}\bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y})$ выполняется для любых векторов $\bar{x}, \bar{y} \Rightarrow \hat{A}$ – ортогональный оператор. ►

Теорема 10. Линейный оператор \hat{A} является ортогональным тогда и только тогда, когда \hat{A} переводит ортонормированный базис в ортонормированный.



Теорема 11. Если матрица линейного оператора в некотором ортонормированном базисе ортогональная, то этот оператор является ортогональным. И наоборот, матрица ортогонального оператора в любом ортонормированном базисе является ортогональной.

◀ Выберем в евклидовом пространстве любой ортонормированный базис. Тогда для любых векторов \bar{x} и \bar{y} , скалярное произведение $(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = X^T Y$, где X и Y -столбцы координат.

Пусть A матрица линейного оператора в ортонормированном базисе является ортогональной. Тогда $A^T A = E$ и, следовательно, равенство $X^T (A^T A) Y = X^T E Y = (\bar{x}, \bar{y})$ выполняется для любых \bar{x}, \bar{y} .

Но $X^T (A^T A) Y = (AX)^T (AY) = (\hat{A}\bar{x}, \hat{A}\bar{y})$.



Таким образом мы доказали, что $(\hat{A}\bar{x}, \hat{A}\bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y})$. А это означает, что оператор ортогональный.

Докажем обратное утверждение. В любом ортонормированном базисе для ортогонального оператора соотношение $(\hat{A}\bar{x}, \hat{A}\bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y})$, можно записать в координатном виде:

$(AX)^T (AY) = X^T Y$ или $X^T (A^T A) Y = X^T E Y$, отсюда следует, что $A^T A = E$,

То есть A - ортогональная матрица.





Теорема 12. В евклидовом пространстве матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому является ортогональной.

◀ Рассмотрим в произвольном n -мерном евклидовом пространстве E два ортонормированных базиса $S_1 = \{\vec{e}_i\}, S_2 = \{\vec{f}_i\}$;

$P = P_{S_1 \rightarrow S_2}$ — матрица перехода от S_1 к S_2 : $P = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, где

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + \cdots + a_{1n}\vec{e}_n \\ \vdots \\ \vec{f}_n = a_{n1}\vec{e}_1 + \cdots + a_{nn}\vec{e}_n \end{cases}.$$

Тогда



$$\begin{aligned} P^T P &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\vec{f}_1, \vec{f}_1) & \cdots & (\vec{f}_1, \vec{f}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\vec{f}_n, \vec{f}_1) & \cdots & (\vec{f}_n, \vec{f}_n) \end{pmatrix} = E, \end{aligned}$$

так как базис S_2 ортонормированный.

Итак, $P^T = P^{-1}$, значит P – ортогональная матрица.

