ЛЕКЦИЯ № 13

Евклидовы пространства.

Алгоритм Грама-Шмидта ортогонализации базиса.

Решение задач на квадратичные формы и евклидовы пространства.

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

В каждом пространстве существует ортонормированный базис и построить его можно с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта.

Пусть $\{\overline{e}_1; \overline{e}_2 \dots \overline{e}_n\}$ - некоторый базис в евклидовом пространстве E. Построим $\{\overline{h}_1; \overline{h}_2 \dots \overline{h}_n\}$ – ортонормированный базис.

1) $\boldsymbol{\overline{f}_1 = \overline{e}_1}$

2) $\boldsymbol{\bar f_2 = \bar e_2 - \lambda \bar f_1}$

$\boldsymbol{\lambda}$ выбираем из условия ортогональности вектора $\boldsymbol{\bar f_2}$ к $\boldsymbol{\bar f_1}$:

$(\bar f_1, \bar f_2) = 0;\quad (\bar f_1, \bar e_2 - \lambda \bar f_1) = 0; =>$

$(\bar f_1, \bar e_2) - \lambda\,(\bar f_1, \bar f_1) = 0; => \quad \boldsymbol{\lambda = \frac{(\bar f_1, \bar e_2)}{(\bar f_1, \bar f_1)} = \frac{(\bar e_1, \bar e_2)}{(\bar e_1, \bar e_1)}};$

3) $\boldsymbol{\bar f_3 = \bar e_3 - \lambda_1 \bar f_1 - \lambda_2 \bar f_2};$

λ_i выбираем из условий ортогональности вектора $\boldsymbol{\bar f_3}$ к $\boldsymbol{\bar f_1}$ и $\boldsymbol{\bar f_2}$:

$(\bar f_1, \bar f_3) = 0;\quad (\bar f_2, \bar f_3) = 0;$

а) $(\bar f_1, \bar f_3) = 0; => (\bar f_1,\ \bar e_3 - \lambda_1 \bar f_1 - \lambda_2 \bar f_2) = 0; =>$

$(\bar f_1, \bar e_3) - \lambda_1(\bar f_1, \bar f_1) - \lambda_2(\bar f_1, \bar f_2) = 0;$ так как $(\bar f_1, \bar f_2) = 0 \ =>$

$$\boldsymbol{\lambda_1} = \frac{(\bar{\mathbf{f}}_1,\bar{\mathbf{e}}_3)}{(\bar{\mathbf{f}}_1,\bar{\mathbf{f}}_1)} = \frac{(\bar{\mathbf{e}}_1,\bar{\mathbf{e}}_3)}{(\bar{\mathbf{e}}_1,\bar{\mathbf{e}}_1)};$$

б) $(\bar{f}_2,\bar{f}_3) = 0; \Rightarrow$

$$(\bar{f}_2,\ \bar{e}_3 - \lambda_1\bar{f}_1 - \lambda_2\bar{f}_2) = (\bar{f}_2,\bar{e}_3) - \lambda_1(\bar{f}_2,\bar{f}_1) - \lambda_2(\bar{f}_2,\bar{f}_2) = 0;$$

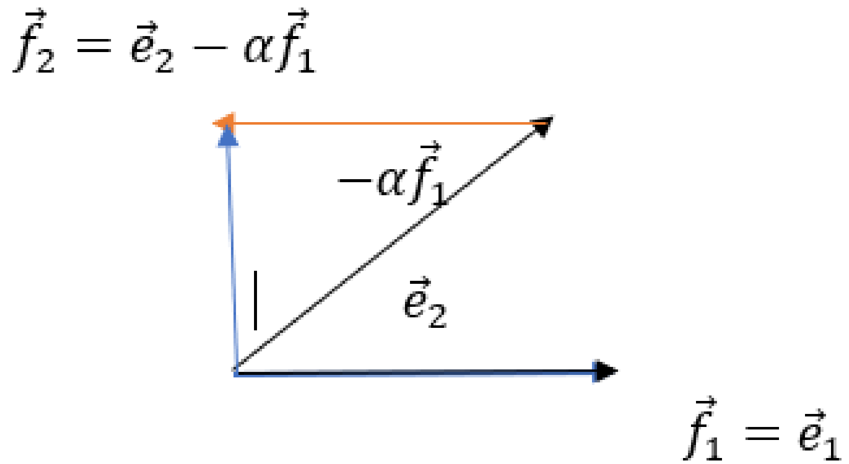
$$(\bar{f}_2,\bar{f}_1) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\lambda_2} = \frac{(\bar{\boldsymbol{f}}_2,\bar{\boldsymbol{e}}_3)}{(\bar{\boldsymbol{f}}_2,\bar{\boldsymbol{f}}_2)};$$

и.т.д. $\bar{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{n}} = \bar{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{\lambda_1}\bar{\boldsymbol{f}}_{\mathbf{1}} - \cdots \boldsymbol{\lambda_{n-1}}\bar{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{n-1}}; \Rightarrow \boldsymbol{\lambda_i} = \frac{(\bar{\boldsymbol{f}}_i,\bar{\boldsymbol{e}}_n)}{(\bar{\boldsymbol{f}}_i,\bar{\boldsymbol{f}}_i)}$

Базис $\{\bar{f}_1;\bar{f}_2 \dots \bar{f}_n\}$- ортогональный.

Нормируя векторы $\{\bar{f}_1;\bar{f}_2 \dots \bar{f}_n\}$ получаем ортонормированный базис $\{\vec{h}_1, \dots, \vec{h}_n\}$, где $\vec{h}_i = \frac{\vec{f}_i}{|\vec{f}_i|}, i = 1 \dots n.$

Пример1. Дана матрица Грама скалярного произведения $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Ортогонализовать базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Сделать проверку с помощью матрицы перехода.



Решение.

1) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 = (1{,}0)$; - координаты в базисе $\{\overline{e}_1; \overline{e}_2\}$

2) $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 - \alpha \vec{f}_1$;

$$(\vec{f}_1, \vec{f}_2) = (\vec{f}_1, \vec{e}_2 - \alpha \vec{f}_1) = (\vec{f}_1, \vec{e}_2) - \alpha(\vec{f}_1, \vec{f}_1) = 0 \Rightarrow$$

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) - \alpha(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad \vec{f}_2 = -\frac{1}{2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \left(-\frac{1}{2}; \quad 1\right)$$

Получили ортогональный базис $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$.

Теперь нормируем его и получим ортонормированный базис $H = \{\vec{h}_1, \vec{h}_2\}$, где

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|}, \vec{h}_2 = \frac{\vec{f}_2}{|\vec{f}_2|}.$$

$$|\vec{f}_1| = \sqrt{(\vec{f}_1, \vec{f}_1)} = \sqrt{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \sqrt{2},$$

$$|\vec{f}_2| = \sqrt{(\vec{f}_2, \vec{f}_2)} = \sqrt{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Тогда $\vec{h}_1 = \frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|} = \frac{\vec{e}_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0)$,

$\vec{h}_2 = \frac{\vec{f}_2}{|\vec{f}_2|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right)$.

Проверим ортонормированность построенного базиса $H = \{\vec{h}_1, \vec{h}_2\}$ с помощью матрицы перехода:

$$G_H = P^T G_S P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{7}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

получилась единичная матрица, значит базис $H = \{\vec{h}_1, \vec{h}_2\}$ ортонормированный.

Пример 2

Ортогонализировать базис S=$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, заданный своими координатами в ортонормированном базисе $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$

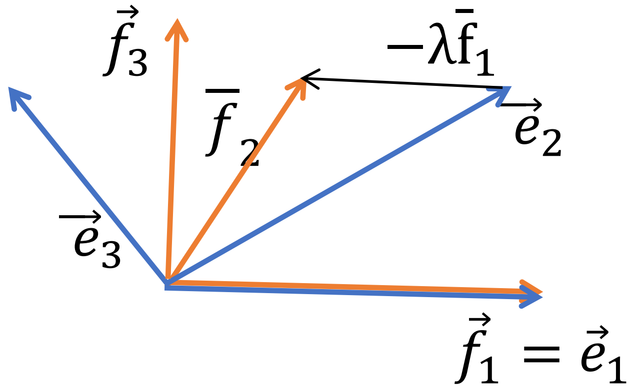
$\vec{e}_1 = (1,1,1)$; $\vec{e}_2 = (1,1,2)$; $\vec{e}_3 = (2,1,1)$.

Решение:

Найдем матрицу Грама базиса S=$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

$$G=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1;\ \overrightarrow{f_2} = \overrightarrow{e_2} - \lambda \overline{f}_1;\ \vec{f}_3 = \overline{e}_3 - \lambda_1 \overline{f}_1 - \lambda_2 \overline{f}_2$$



1) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 = (1,1,1);$

2) $\vec{f}_2 = \overline{e}_2 - \lambda \overline{f}_1$; Найдем λ из условия $\left(\vec{f}_1, \vec{f}_2\right) = 0;$

Можно воспользоваться готовой формулой:

$$\lambda = \frac{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\vec{f}_2 = -\frac{4}{3}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = (1;1;2) - \frac{4}{3}(1;1;1) = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

3) $\bar{f}_3 = \bar{e}_3 - \lambda_1 \bar{f}_1 - \lambda_2 \bar{f}_2$; Для нахождения λ_1 и λ_2 воспользуемся формулами:

$$\lambda_1 = \frac{(\bar{f}_1, \bar{e}_3)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_1)} = \frac{(\bar{e}_1, \bar{e}_3)}{(\bar{e}_1, \bar{e}_1)} = \frac{4}{3};$$

$$\lambda_2 = \frac{(\bar{f}_2, \bar{e}_3)}{(\bar{f}_2, \bar{f}_2)} = \frac{-\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \text{-}1/2\ .$$ Находим $\bar{f}_3$.

$$\bar{f}_3 = \bar{e}_3 - \frac{4}{3}\bar{f}_1 + \frac{1}{2}\bar{f}_2 = (2,1,1) - \frac{4}{3}(1,1,1) + \frac{1}{2}(-1/3,-1/3,2/3) = (1/2,-\,1/2,0);$$

Получили ортогональный базис $\{\bar{f}_1; \bar{f}_2; \bar{f}_3\}$.

Нормируем его.

$$|\vec{f_1}| = \sqrt{3};\ |\vec{f_2}| = \sqrt{6}/3;\ |\vec{f_3}| = \sqrt{2}/2;$$

$$\overline{h_1} = \frac{\vec{f_1}}{|\vec{f_1}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right);\quad \overline{h_2} = \frac{\vec{f_2}}{|\vec{f_2}|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right);$$

$$\overline{h_3} = \frac{\vec{f_3}}{|\vec{f_3}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$\overline{h_1}, \overline{h_2}, \overline{h_3}$ – ортонормированный базис.

Проверим:

1 способ:

$$(\overline{h_1}, \overline{h_2}) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = 0;$$

$$(\overline{h_1}, \overline{h_3}) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = 0;$$

$$(\overline{h_2}, \overline{h_3}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = 0;$$

$$|\overline{h_1}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

$$|\overline{h_2}| = \sqrt{\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2} = 1$$

$$|\overline{h_3}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

Верно.

Сделаем проверку вторым способом- через матрицу перехода.

Для этого необходимо представить базис $\overline{h_1}, \overline{h_2}, \overline{h_3}$ в координатах базиса

S=$\{\vec{e}_1, \vec{e}_{2,} \vec{e}_3\}$

$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 = (1,0,0)_S$;

$$\vec{f}_2 = -\frac{4}{3}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = (-\frac{4}{3}, 1,0)_S;$$

$$\bar{f}_3 = \bar{e}_3 - \frac{4}{3}\bar{f}_1 + \frac{1}{2}\bar{f}_2 = -\frac{4}{3}\bar{e}_1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) + \bar{e}_3 = -2\bar{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2 + \bar{e}_3 =$$

$$= (-2, \frac{1}{2}, 1)_S$$

Норма вектора не зависит от выбора базиса =>

$$\overline{h_1} = \frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0,0\right)_S; \quad \overline{h_2} = \frac{\vec{f}_2}{|\vec{f}_2|} = \left(-\frac{4}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, 0\right)_S;$$

$$\overline{h_3} = \frac{\vec{f}_3}{|\vec{f}_3|} = \left(\frac{-4}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)_S$$

$$G_H = P^T G_E P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{\sqrt{6}} & ,\frac{3}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{-4}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{-4}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{-4}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Верно. Проверка с помощью матрицы перехода показала,

что построенный базис $\overline{h_1}, \overline{h_2}, \overline{h_3}$ является ортонормированным.

Можно также сделать проверку через матрицу Грама в базис S=$\{\vec{e}_1, \vec{e}_{2,}\vec{e}_3\}$

$$\overline{h_1}G\overline{h_2} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0{,}0\right)_S \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{6}} \\ \frac{3}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix}_s = 0;$$

Можно также убедиться, что $\overline{h_1}G\overline{h_2} = 0$ и $\overline{h_2}G\overline{h_3} = 0$.

Пример 3. В пространстве V_3 задан базис $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, где

$$\vec{e}_1 = \vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}, \vec{e}_2 = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}\,, \vec{e}_3 = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}\,.$$

Найти матрицу Грама в этом базисе. Выписать формулу длины вектора через его координаты в базисе S. Ортогонализовать базис S.

Решение. $\vec{e}_1 = (1;1;-1)$, $\vec{e}_2 = (1;1;1)$, $\vec{e}_3 = (2;1;0)$

1 способ.

Найдем все скалярные произведения базисных векторов:

$(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 3$, $(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 3$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = 3$, $(\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 5$, $(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 3$

$$G_S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$ – матрица Грама.

2 способ.

Выпишем матрицу перехода:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_S = P^T G_{\{i,j,k\}} P$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$ – матрица Грама.

Пусть $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \;\Rightarrow$

$$(\vec{x},\vec{x}) = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)_S G_S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_S = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (3x_1 + x_2 + 3x_3 \quad x_1 + 3x_2 + 3x_3 \quad 3x_1 + 3x_2 + 5x_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 3x_1^2 + x_1x_2 + 3x_1x_3 + x_1x_2 + 3x_2^2 + 3x_2x_3 + 3x_1x_3$$

$$+ 3x_2x_3 + 5x_3^2 =$$

$$= 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_2x_3 + 5x_3^2 \Rightarrow$$

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x},\vec{x})} = \sqrt{3x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3}$$

Формула длины вектора через его координаты в базисе $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$\boxed{|\vec{x}| = \sqrt{3x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 6x_2x_3}}$$

Ортогонализуем базис $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, используя алгоритм Грама-Шмидта:

1) $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 = (1; 1; -1)$
2) $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 - \lambda \vec{f}_1$. Найдем λ из условия $\left(\vec{f}_1, \vec{f}_2\right) = 0$.

Можно воспользоваться готовой формулой:

$$\lambda = \frac{(\vec{f}_1,\ \vec{e}_2)}{(\vec{f}_1, \vec{f}_1)} = \frac{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\vec{f}_2 = -\frac{1}{3}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = -\frac{1}{3}(1;1;-1) + (1;1;1) = \left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$$

3) $\vec{f}_3 = \vec{e}_3 - \lambda_1\vec{f}_1 - \lambda_2\vec{f}_2$

Для нахождения λ_1 и λ_2 воспользуемся формулами:

$$\lambda_1 = \frac{(\vec{f}_1, \vec{e}_3)}{(\vec{f}_1, \vec{f}_1)} = \frac{(\vec{e}_1, \vec{e}_3)}{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{(\vec{f}_2, \vec{e}_3)}{(\vec{f}_2, \vec{f}_2)} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}}{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9}} = \frac{2}{8/3} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\vec{f}_3 = \vec{e}_3 - \vec{f}_1 - \frac{3}{4}\vec{f}_2 = (2;1;0) - (1;1;-1) - \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$$

Получили ортогональный базис $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$.

Мы нашли его координаты в ортонормированном базисе $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

$$\vec{f}_1 = (1;1;-1), \qquad \vec{f}_2 = \left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right), \qquad \vec{f}_3 = \left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};0\right)$$

Нормируем базис $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$:

$$|\vec{f}_1| = \sqrt{3}, \qquad |\vec{f}_2| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \qquad |\vec{f}_3| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{\boldsymbol{h}}_1 = \frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}; \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}; -\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\right),$$

$$\vec{\boldsymbol{h}}_2 = \frac{\vec{f}_2}{|\vec{f}_2|} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{6}}}; \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{6}}}; \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{6}}}\right),$$

$$\vec{\boldsymbol{h}}_3 = \frac{\vec{f}_3}{|\vec{f}_3|} = \left(\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}; -\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}; \mathbf{0}\right).$$

$\{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3\}$ – ортонормированный базис.

Проверка:

1 способ:

$$(\vec{h}_1, \vec{h}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = 0$$

$$(\vec{h}_1, \vec{h}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\vec{h}_2, \vec{h}_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$|\vec{h}_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1,$$

$$|\vec{h}_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2} = 1,$$

$$|\vec{h}_3| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

Следовательно, базис $\{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3\}$ - ортонормированный.

2 способ (через матрицу перехода):

Для этого необходимо представить базис $\{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3\}$ в координатах базиса $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_{2,} \vec{e}_3\}$:

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 = (1;0;0)_S$$

$$\vec{f}_2 = -\frac{1}{3}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 = \left(-\frac{1}{3};1;0\right)_S$$

$$\vec{f}_3 = \vec{e}_3 - \vec{f}_1 - \frac{3}{4}\vec{f}_2 = -\vec{e}_1 - \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) + \vec{e}_3 =$$

$$= -\frac{3}{4}\vec{e}_1 - \frac{3}{4}\vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{4}; 1\right)_S$$

Норма вектора не зависит от выбора базиса ⇒

$$\vec{h}_1 = \frac{\vec{f}_1}{|\vec{f}_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 0; 0\right)_S$$

$$\vec{h}_2 = \frac{\vec{f}_2}{|\vec{f}_2|} = \left(-\frac{1}{2\sqrt{6}}; \frac{3}{2\sqrt{6}}; 0\right)_S$$

$$\vec{h}_3 = \frac{\vec{f}_3}{|\vec{f}_3|} = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}; -\frac{3\sqrt{2}}{4}; \sqrt{2}\right)_S$$

$$G_H = P^T G_S P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{3}{2\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{3\sqrt{2}}{4} & -\frac{3\sqrt{2}}{4} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{6}} & -\frac{3\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{3}{2\sqrt{6}} & -\frac{3\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{3} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{6}} & -\frac{3\sqrt{2}}{4} \\ 0 & \frac{3}{2\sqrt{6}} & -\frac{3\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверка с помощью матрицы перехода показала, что построенный базис $\{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3\}$ является ортонормированным.

Можно также сделать проверку через матрицу Грама в базис $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$$(\vec{h}_1, \vec{h}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix}_S \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{6}} \\ \frac{3}{2\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix}_S = 0$$

Можно также убедиться, что

$$(\vec{h}_1, \vec{h}_3) = 0 \text{ и } (\vec{h}_2, \vec{h}_3) = 0.$$

Решение задач

Задача 1. Найти все значения параметра λ, при котором положительно определена следующая квадратичная форма. В ответе указать наименьшее целое значение λ, при котором положительно определена квадратичная форма $Q = 2x_1^2 + \lambda x_2^2 + 2\lambda x_3^2 + 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2\lambda x_2x_3$.

Решение. Составим матрицу квадратичной формы.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & 2\lambda \end{pmatrix}$$

Рассмотрим миноры I, II и III-го порядков матрицы B.

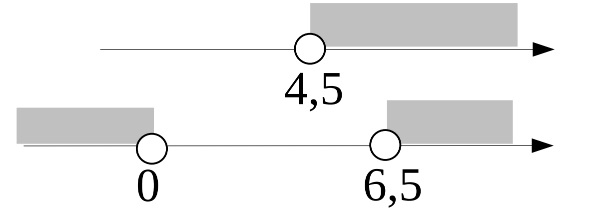
$M_1 = 2 > 0,\ M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda - 9,$

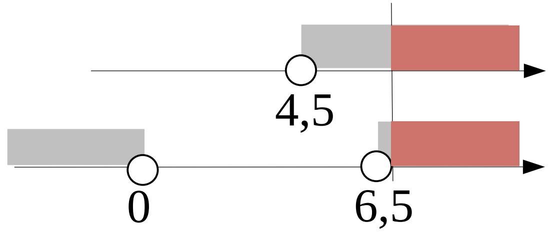
$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & \lambda & \lambda \\ 1 & \lambda & 2\lambda \end{vmatrix} = 4\lambda^2 + 3\lambda + 3\lambda - \lambda - 2\lambda^2 - 18\lambda = 2\lambda^2 - 13\lambda$$

Чтобы форма была положительно определенной, по критерию Сильвестра необходимо чтобы все главные миноры были положительными.

Решим систему неравенств:

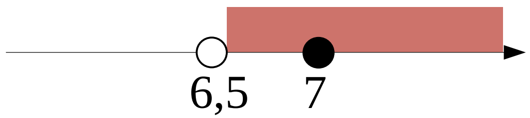
$$\begin{cases} 2\lambda - 9 > 0 \\ 2\lambda^2 - 13\lambda > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda > 4{,}5 \\ \lambda(2\lambda - 13) > 0 \end{cases}$$





Общее решение $\lambda > 6{,}5$

<u>Наименьшее целое</u> значение λ, при котором положительно определена квадратичная форма равно **7**.



Задача 2. Найти все значения параметра a, при котором отрицательно определена следующая квадратичная форма. В ответе указать наименьшее целое значение a, при котором она отрицательно определена.

$$Q = -4x_1^2 + ax_2^2 - 3x_3^2 - 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 - 2ax_2x_3$$

Решение. Составим матрицу квадратичной формы.

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -a & 1 \\ -a & a & -a \\ 1 & -a & -3 \end{pmatrix}$$

Чтобы форма была отрицательно определенной, по критерию Сильвестра необходимо, чтобы все главные миноры знакочередовались, начиная с минуса.

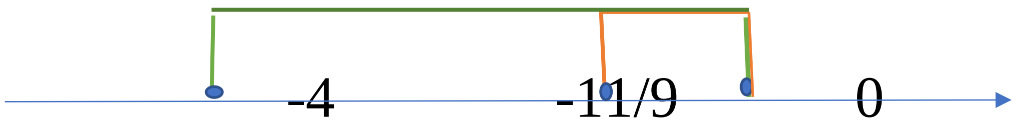
Рассмотрим миноры I, II и III-го порядков матрицы B.

$$M_1 = -4 < 0,\ \ M_2 = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -4a - a^2 > 0,$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} -4 & -a & 1 \\ -a & a & -a \\ 1 & -a & -3 \end{vmatrix} = 12a + 2a^2 - a + 3a^2 + 4a^2 = 9a^2 + 11a < 0$$

Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} a(4+a) < 0 \\ 9a^2 + 11a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(4+a) < 0 \\ a(9a+11) < 0 \end{cases}$$



Общее решение: $-11/9 < a < 0$

Ответ: a= -1.

Задача 3.

При каком значении параметра a уравнение

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 - a \cdot x_3^2 = 1$$

будет определять цилиндрическую поверхность?

Решение.

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 - a \cdot x_3^2 =$$

$$= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 4x_2^2 + 8x_2x_3 - (a+1)x_3^2 =$$

$$=(x_1 - x_2 + x_3)^2 + 4(x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2) - (a+5)x_3^2 =$$

$$= x^2 + 4\,y^2 - (a+5)\,z^2 = 1$$

Ответ: -5

Задача 4.

При каком наибольшем целом значении параметра a уравнение

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 - a \cdot x_3^2 = 1$$

будет определять эллипсоид?

Решение: $(a+5) < 0$; $a < -5$

Ответ: -6

Задача 5.

При каком наименьшем целом значении параметра a уравнение

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 - a \cdot x_3^2 = 1$$

будет определять однополостный гиперболоид?

Решение: $(a+5) > 0$; $a > -5$

Ответ: -4

Задача 6. **Найти наименьшее целое значение параметра $\boldsymbol{a}$, при котором матрица $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$ является матрицей Грама в каком-либо базисе пространства $\boldsymbol{E_3}$.**

Решение:

Матрица симметричная;

$$\begin{cases} 1 > 0 \\ a - 1 > 0 \\ a^2 - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ a(a-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 1$$

Ответ: $a = 2$.

Задача 7. В линейном пространстве многочленов P_1 степени не выше 1 в каноническом базисе $\{1, t\}$, скалярное произведение задано формулой:

$$(p_1, p_2) = \int_0^1 p_1(t) p_2(t) dt.$$

Найти угол между элементами пространства:

$$p(t) = 12t - 4 \text{ и } g(t) = -6t + 4\,.$$

Решение.

Матрица Грама скалярного произведения будет имеет вид:

$$G = \begin{pmatrix} \int_0^1 1\,dt & \int_0^1 t\,dt \\ \int_0^1 t\,dt & \int_0^1 t^2\,dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(p,q) = (-4 \quad 12)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = (2 \quad 2)\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = -4\,,$$

$$(p,p) = (-4 \quad 12)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix} = (2 \;\; 2)\begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix} = 16\,,$$

$$(g,g) = (4 - 6)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = (1 \;\; 0)\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 4\,.$$

$$cos\varphi = \frac{(p,g)}{\|p\| \cdot \|g\|} = \frac{-4}{4 \cdot 2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$