



ЛЕКЦИЯ № 11

Знакоопределенные квадратичные формы.

Определение. Квадратичная форма называется *положительно определенной*, если $\forall \vec{x} \neq \vec{0}: \varphi(\vec{x}) > 0$

Определение. Квадратичная форма называется *отрицательно определенной*, если $\forall \vec{x} \neq \vec{0}: \varphi(\vec{x}) < 0$

Если квадратичная форма не является положительно или отрицательно определенной, то говорят, что она *общего вида* или *знакопеременная*.



Примеры.

- 1) $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2$ - положительно определенная;
- 2) $\varphi(\vec{x}) = -x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2$ - отрицательно определенная;
- 3) $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 2x_3^2$ - общего вида, так как $\varphi(0, 1, 0) = 0$.

Исследование квадратичной формы на знакоопределенность:

1 способ - по каноническому виду

Тип квадратичной формы зависит только от множества значений, которые она принимает, но не зависит от переменных, в которых она записана. Поэтому, представив квадратичную форму в каноническом виде,



получаем следующие критерии оценки ее типа в зависимости от коэффициентов в ее каноническом виде .

Теорема 7.

- 1) Квадратичная форма **положительно определена** $\Leftrightarrow$ она невырожденная и все коэффициенты в ее каноническом виде положительные: $(r = r_+ = \dim V_n)$
- 2) Квадратичная форма **отрицательно определена** $\Leftrightarrow$ она невырожденная и все коэффициенты в ее каноническом виде отрицательные: $(r = r_- = \dim V_n)$



2 способ - по критерию Сильвестра

Теорема 8. Критерий Сильвестра. Квадратичная форма положительно определена $\Leftrightarrow$ все главные (угловые) миноры матрицы квадратичной формы положительные.

► Необходимость: Если квадратичная форма $\varphi(\overline{x})$ положительно определена, то в ее каноническом виде все коэффициенты положительны,

а матрица имеет вид
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \lambda_i & \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$$\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n > 0;$$



При переходе к другим переменным

$$\det(P^T A_1 P) = (\det P)^2 \det A_1 > 0$$

Рассмотрим квадратичную форму $\varphi_k(\overline{x}) =$

$\varphi_k(x_1, \dots, x_k) = \varphi(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ от k переменных, также положительно

определенную, и следовательно определитель ее матрицы $\Delta_k > 0$ при

$k = \overline{1, n}$. $\Rightarrow$ все главные миноры матрицы положительны;

Достаточность: без доказательства. ◀



Следствие. Квадратичная форма отрицательно определена $\Leftrightarrow$ знаки главных миноров матрицы квадратичной формы чередуются, начиная с минуса. ►

Если квадратичная форма $\varphi(\bar{x})$ отрицательно - определенная, тогда $-\varphi(\bar{x})$ - положительно определенная, и у нее матрица $(-A)$. Для положительной определенности $-\varphi(\bar{x})$ необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры матрицы $(-A)$ были положительны. Но при умножении матрицы на (-1) , все ее элементы умножаются на (-1) и $\Delta'_r = (-1)^r \Delta_r$; где Δ_r - угловой минор порядка r матрицы A . Таким образом, $-\varphi(\bar{x})$ положительно определена тогда и только тогда, когда $\Delta'_r = (-1)^r \Delta_r > 0; r = \overline{1; n}$, т. е. Δ_r знакопеременуются, начиная с “-“, а это условие эквивалентно тому, что квадратичная форма $\varphi(\bar{x})$ отрицательно определенная. ◀



Определим угловые миноры для матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = a_{11}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \det A.$$

Критерий Сильвестра для трехмерного пространства.

$$\begin{aligned} & \Delta_1 > 0 \\ 1) \quad & \Delta_2 > 0 \Leftrightarrow \text{квадратичная форма положительно определена} \\ & \Delta_3 > 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Delta_1 &< 0 \\ 2) \quad \Delta_2 &> 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{квадратичная форма отрицательно} \\ \Delta_3 &< 0 \end{aligned}$$

определена

3) Во всех остальных случаях квадратичная форма знакопеременная, или общего вида.

Пример 1.

Привести квадратичную форму

$\varphi(\vec{x}) = -2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3$ к каноническому виду методом Лагранжа, выписать преобразование координат.

Найти положительный и отрицательный индексы, ранг квадратичной формы $\varphi(\vec{x})$.



Исследовать $\varphi(\vec{x})$ на знакоопределенность двумя способами: по каноническому виду и по критерию Сильвестра.

Решение:

Приведём квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа, то есть выделим полные квадраты:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x}) &= -2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 = (x_3^2 + 8x_1x_3 + 16x_1^2) - 16x_1^2 - \\ &- 2x_1^2 - x_2^2 + 4x_1x_2 = (x_3 + 4x_1)^2 - (x_2 - 2x_1)^2 - 14x_1^2 = \\ &= y_1^2 - y_2^2 - 14y_3^2,\end{aligned}$$

где соответствующее преобразование координат имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = 4x_1 + x_3 \\ y_2 = x_2 - 2x_1 \\ y_3 = x_1 \end{cases}$$



Определим положительный r_+ и отрицательный r_- индексы и ранг r квадратичной формы по её каноническому виду:
количество положительных коэффициентов $r_+ = 1$
количество отрицательных коэффициентов $r_- = 2$,
общее количество ненулевых коэффициентов в каноническом виде
 $r = 3$.

Исследуем на знакоопределенность

- по каноническому виду:

ранг $r = \dim V_3$, но не совпадает ни с одним из индексов,
значит квадратичная форма знакопеременная или общего вида

- по критерию Сильвестра: выпишем матрицу данной квадратичной формы



$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и вычислим главные миноры

$$\Delta_1 = -2 < 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 < 0, \Rightarrow \text{квадратичная форма общего вида.}$$

Замечание. Можно другим способом привести данную квадратичную форму к каноническому виду и убедиться в выполнении закона инерции, например:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) &= -2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 = -2(x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + \\ &+ 4x_2x_3 + x_2^2 + 4x_3^2) + 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 8x_3^2 - x_2^2 + x_3^2 = \\ &= -2(x_1 - x_2 - 2x_3)^2 + (x_2^2 + 8x_2x_3 + 16x_3^2) - 7x_3^2 = \\ &= -2(x_1 - x_2 - 2x_3)^2 + (x_2 + 4x_3)^2 - 7x_3^2 = -2y_1^2 + y_2^2 - 7y_3^2 \end{aligned}$$



$$y_1 = x_1 - x_2 - 2x_3;$$

$$y_2 = x_2 + 4x_3;$$

$$y_3 = x_3$$

$r_+ = 1; r_- = 2; r = 3$. Мы видим, что закон инерции квадратичных форм выполняется.

Пример 2. Исследовать квадратичную форму

$$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3.$$

Решение:

Выделим полный квадрат по x_1 . Для этого соберем все слагаемые, содержащие x_1 , и дополним до полного квадрата:



$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x}) &= x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 = \\ &= ((x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3) + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_2x_3) - 4x_2^2 - x_3^2 + 4x_2x_3 + \\ &+ 5x_2^2 + 6x_3^2 - 6x_2x_3 = (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_2x_3\end{aligned}$$

После приведения подобных членов аналогичным образом выделим полный квадрат по x_2 .

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x}) &= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) - x_3^2 + 5x_3^2 = \\ &= (x_1 - 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 + 4x_3^2;\end{aligned}$$

Введём новые переменные:

$$y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3, y_2 = x_2 - x_3, y_3 = x_3.$$

И получаем квадратичную форму канонического вида:

$$\varphi(\vec{y}) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2$$



количество положительных коэффициентов $r_+ = 3$,
количество отрицательных коэффициентов $r_- = 0$,
общее количество ненулевых коэффициентов в каноническом виде
 $r = 3$.

По каноническому виду определяем, что квадратичная форма является положительно определенной.

По критерию Сильвестра:

Выпишем матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ и вычислим главные миноры

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 > 0,$$



$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 4 > 0 \Rightarrow$$

квадратичная форма положительно определенная.

Пример 3. Исследовать квадратичную на знакоопределенность двумя способами: с помощью приведения к каноническому виду и с помощью критерия Сильвестра.

$$\varphi(\vec{x}) = -9x_1^2 - 6x_2^2 - 10x_3^2 + 12x_1x_2 + 6x_1x_3 - 12x_2x_3 .$$

Решение.

- 1) Приведем квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа:



$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x}) &= -9x_1^2 - 6x_2^2 - 10x_3^2 + 12x_1x_2 + 6x_1x_3 \\ &\quad - 12x_2x_3 = \\ &= -6(x_2^2 + x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 - 2x_1x_3) - 3x_1^2 - 4x_3^2 - 6x_1x_3 = \\ &= -6(x_2 - x_1 + x_3)^2 - 3(x_1 + x_3)^2 - x_3^2 \Rightarrow \\ \begin{cases} y_1 = x_2 - x_1 + x_3 \\ y_2 = x_1 + x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} &\quad \text{— преобразование координат} \Rightarrow\end{aligned}$$

канонический вид квадратичной формы:

$$\varphi(y_1, y_2, y_3) = -6y_1^2 - 3y_2^2 - y_3^2 \Rightarrow i_+ = 0, \quad i_- = r = 3 \Rightarrow$$

квадратичная форма $\varphi(\vec{x})$ является отрицательно определенной.



2) Критерий Сильвестра. Выпишем матрицу квадратичной формы $\varphi(\vec{x}) = -9x_1^2 - 6x_2^2 - 10x_3^2 + 12x_1x_2 + 6x_1x_3 - 12x_2x_3$

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 3 \\ 6 & -6 & -6 \\ 3 & -6 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta_1 = -9 < 0, \quad \Delta_2 = 18 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -9 & 6 & 3 \\ 6 & -6 & -6 \\ 3 & -6 & -10 \end{vmatrix} = 18 \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -6 & -10 \end{vmatrix} = 18 \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -7 \end{vmatrix} = -18 < 0$$
$$\Rightarrow$$

по критерию Сильвестра $\varphi(\vec{x})$ является отрицательно определенной.



Пример 4. Исследовать квадратичную форму

$$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Решение: $\varphi(\vec{x}) = ((x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3) + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_2x_3) - 4x_2^2 - x_3^2 + 4x_2x_3 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_2x_3 = (x_1 + 2x_2 - x_3)^2 + x_3^2$

$$y_1 = x_1 + 2x_2 - x_3, y_2 = x_3; y_3 = x_2.$$

y_3 можно задать произвольно, но так чтобы матрица перехода была невырожденной.

И получаем квадратичную форму канонического вида:

$$\varphi(\vec{y}) = y_1^2 + y_2^2$$

количество положительных коэффициентов $r_+ = 2$,

количество отрицательных коэффициентов $r_- = 0$,



общее количество ненулевых коэффициентов в каноническом виде

$$r = 2.$$

По каноническому виду определяем, что квадратичная форма общего вида.

По критерию Сильвестра:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычислим главные миноры

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Rightarrow$$

квадратичная форма общего вида.