



ЛЕКЦИЯ № 10

Канонический вид квадратичной формы.

Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Закон инерции квадратичных форм.

1. Квадратичная форма канонического вида.

Определение. Квадратичную форму $\varphi(\bar{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_i x_i^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$, не имеющую попарных произведений переменных, называют *квадратичной формой канонического вида.*



Базис, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называют **каноническим базисом**.

В каноническом базисе матрица квадратичной формы имеет

диагональный вид:
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \lambda_i & \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Если $\lambda_i = \{0, \pm 1\}$, $i = \overline{1:n}$, то говорят, что квадратичная форма приведена к **нормальному виду**.

Метод Лагранжа.

Один из методов приведения квадратичной формы к каноническому виду путем замены переменных состоит в последовательном выделении полных квадратов. Такой метод называется методом Лагранжа.



Пример 1. Рассмотрим $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2$ на пространстве V_2 .

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x}) &= x_1^2 - 4x_1x_2 = (x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2) - 4x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 - 4x_2^2 \\ &= y_1^2 - y_2^2.\end{aligned}$$

Квадратичная форма приведена к нормальному виду.

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 \\ y_2 = 2x_2 \end{cases}$$

Проверим выполнение формулы $A_2 = P^T A_1 P$;

Для этого запишем преобразование координат в виде: $Y = P^{-1}X$;

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

Р можно было найти, выразив x_i через y_i :



$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2; \\ x_2 = y_2/2 \end{cases}; \quad X=PY \Rightarrow P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$A_2 = P^T A_1 P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \text{ верно.}$$

Пример 2.

Дана квадратичная форма $\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

Выписать преобразование координат. Сделать проверку с помощью матрицы перехода.

Решение.

Воспользуемся формулами сокращенного умножения для трех слагаемых:



$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$(a-b+c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$$

$$(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$$

$$(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$$

Выделим слагаемые, содержащие x_1 .

$$\varphi(\vec{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 = (x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3) + 3x_2^2 +$$

$$+ 2x_3^2 = (x_1^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_2x_3) - x_2^2 - 4x_3^2 - 4x_2x_3 +$$

$$+ 3x_2^2 + 2x_3^2 = (x_1 - x_2 - 2x_3)^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_2x_3 = (\text{выделим}$$

переменные, содержащие x_2)=

$$= (x_1 - x_2 - 2x_3)^2 + 2(x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) - 2x_3^2 - 2x_3^2 = (x_1 - x_2 - 2x_3)^2$$

$$+ 2(x_2 - x_3)^2 - 4x_3^2 = y_1^2 + 2y_2^2 - 4y_3^2,$$

где соответствующее преобразование координат имеет вид:



$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 - 2x_3 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

Проверим формулу перехода к другому базису.

$$x_3 = y_3; x_2 = y_2 + y_3; x_1 = y_1 + y_2 + 3y_3;$$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + 3y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = P^T A_1 P$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Верно.



Как применить метод Лагранжа в общем случае?

- Если $a_{11} \neq 0$, группируем все слагаемые формы, содержащие x_1 и выделим полный квадрат по x_1 . Таким образом мы получим квадратичную форму, не содержащую x_1 . Далее аналогично поступаем с x_2 и т.д. Если же $a_{11} = 0$, то начнем с другой переменной.

- Если в квадратичной форме нет квадратов переменных, то перед выделением полных квадратов следует сделать промежуточную замену переменных. Например,

$x_1 = y_1 + y_2; x_2 = y_1 - y_2; x_3 = y_3$; тогда $x_1 x_2 = y_1^2 - y_2^2$, появятся квадраты переменных и далее можно решать обычным способом.



Пример 3. Привести квадратичную форму к каноническому виду.

$$\varphi(\vec{x}) = x_1x_2 + 2x_1x_3;$$

Решение. Замечаем, что в данной квадратичной форме отсутствуют квадраты переменных. Тогда делаем промежуточную замену.

$$x_1 = y_1 + y_2; x_2 = y_1 - y_2; x_3 = y_3;$$

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{y}) &= (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 2(y_1 + y_2)y_3 = y_1^2 - y_2^2 + 2(y_1 + y_2)y_3 = \\ &= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 + 2y_2y_3 = (y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2) - y_3^2 - y_2^2 + 2y_2y_3 = \\ &= (y_1 + y_3)^2 - (y_2 - y_3)^2 \Rightarrow \varphi(\vec{z}) = z_1^2 - z_2^2;\end{aligned}$$

$$z_1 = y_1 + y_3; z_2 = y_2 - y_3;$$

z_3 выбирается произвольным образом так, чтобы матрица перехода была невырожденной. Например, в нашем случае, $z_3 = y_3$.



Отметим, что канонический вид, к которому приводится квадратичная форма, определяется неоднозначно, он зависит от того, какие производятся преобразования. *Однако имеются характеристики коэффициентов в каноническом виде, которые остаются неизменными.*

Теорема 5. Ранг квадратичной формы не меняется при замене базиса и равен количеству ненулевых коэффициентов в каноническом виде.

► При замене базиса линейного пространства, в котором определена квадратичная форма, ее матрица меняется по формуле:

$A_2 = P^T A_1 P$, где P - матрица перехода от старого базиса к новому.

P -невырожденная, $\Rightarrow \text{rang } A_2 = \text{rang } A_1$, так как при умножении на P и P^T ранг матрицы не изменится. ◀



Теорема 6. Закон инерции квадратичных форм.

Количество положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы не зависит от выбора канонического базиса.

► Пусть $\varphi_1(\vec{x})$ и $\varphi_2(\vec{x})$ - два канонический вида квадратичной формы.

Согласно теоремы 5, $\text{rang} \varphi_1(\vec{x}) = \text{rang} \varphi_2(\vec{x}) = k$. Пусть у них положительные коэффициенты предшествуют отрицательным. Это всегда можно сделать, изменив порядок переменных.

$$\varphi_1(\vec{x}) = \alpha_1 y_1^2 + \dots + \alpha_p y_p^2 - \dots - \alpha_k y_k^2$$

$$\varphi_2(\vec{x}) = \beta_1 z_1^2 + \dots + \beta_q z_q^2 - \dots - \beta_k z_k^2$$

$$\alpha_i > 0 \text{ и } \beta_i > 0 \forall i$$



Надо доказать, что $p=q$. Пусть это не так, $p>q$. Пусть данные канонические формы записаны в базисах:

$S_1 = \{e_1; \dots e_n\}$ и $S_2 = \{f_1; \dots f_n\}$ соответственно. Покажем, что $\exists \vec{x} \neq \vec{0}$, такой что его координаты в базисах S_1 и S_2 такие: $y_i = 0$ при $i = \overline{p+1, n}$; $z_j = 0$ при $j = \overline{1, q}$.

Координаты z_j линейным образом выражаются через y_i :

$$z_j = u_{j1}y_1 + \dots + u_{jn}y_n \quad j = \overline{1, n}$$

Причем матрица U - это матрица перехода от базиса S_2 к базису S_1 .

Поставленные для $\vec{x}$ условия составляют однородную систему уравнений относительно y_i .



$$\begin{cases} y_{p+1} = 0 \\ \dots \\ y_n = 0 \\ u_{11}y_1 + \dots + u_{1n}y_n = 0 \\ \dots \\ u_{q1}y_1 + \dots + u_{qn}y_n = 0 \end{cases}$$

Число уравнений $(n-p+q) < n \Rightarrow$ система имеет ненулевое решение, т.е.

$\exists \vec{x} \neq \vec{0}$, удовлетворяющий поставленным условиям. Тогда для этого вектора

$$\varphi_1(\vec{x}) = \alpha_1 y_1^2 + \dots + \alpha_p y_p^2 > 0;$$

$$\varphi_2(\vec{x}) = -\beta_{q+1} z_{q+1}^2 - \dots - \beta_k z_k^2 \leq 0$$



Получили два взаимоисключающих равенства, что доказывает, что предположение, что $p \neq q$ неверно $\Rightarrow p=q$, т.е. количество положительных коэффициентов в двух канонических видах одинаково. Тогда и количество отрицательных коэффициентов тоже совпадает, так как их ранги равны. ◀

Определение. Положительный индекс r_+ - это количество положительных коэффициентов в каноническом виде.

Определение. Отрицательный индекс r_- - это количество отрицательных коэффициентов в каноническом виде.

Очевидно, что $\text{rang } \varphi(\vec{x}) = r_+ + r_-$



Вернемся в примеру 3.

Привести квадратичную форму к каноническому виду.

$$\varphi(\vec{x}) = x_1 x_2 + 2x_1 x_3; \varphi(\vec{z}) = z_1^2 - z_2^2$$

По каноническому виду определяем, что $\text{rang } \varphi = 2; r_+ = 1; r_- = 1$

Квадратичная форма вырожденная.

Проверим какой ранг имеет матрица исходной квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang } \varphi = 2.$$



Пример 4. Привести квадратичную форму $\varphi(\vec{x}) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3$ к каноническому виду методом Лагранжа, выписать преобразование координат. Найти положительный и отрицательный индексы, ранг квадратичной формы $\varphi(\vec{x})$.

Предлагаем вам другой подход к выделению полного квадрата:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{x}) &= 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 = 2(x_1^2 - x_1x_2 - 2x_1x_3) + 3x_2^2 + \\ &+ 2x_3^2 = 2\left(x_1^2 - 2x_1\left(\frac{1}{2}x_2 + x_3\right) + \left(\frac{1}{2}x_2 + x_3\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x_2 + x_3\right)^2\right) + 3x_2^2 + 2x_3^2 = \\ &= 2\left(x_1 - \left(\frac{1}{2}x_2 + x_3\right)\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2\right) + 3x_2^2 + 2x_3^2 = \\ &= 2\left(x_1 - \left(\frac{1}{2}x_2 + x_3\right)\right)^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_2x_3 - 2x_3^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 =\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= 2 \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 \right)^2 + \frac{5}{2}x_2^2 - 2x_2x_3 = \\ &= 2 \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 \right)^2 + \frac{5}{2} \left(x_2^2 - 2 \cdot \frac{2}{5}x_3x_2 + \frac{4}{25}x_3^2 - \frac{4}{25}x_3^2 \right) = \\ &= 2 \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 \right)^2 + \frac{5}{2} \left(x_2 - \frac{2}{5}x_3 \right)^2 - \frac{2}{5}x_3^2 = 2y_1^2 + \frac{5}{2}y_2^2 - \frac{2}{5}y_3^2, \end{aligned}$$

где соответствующее преобразование координат имеет вид:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3, \\ y_2 = x_2 - \frac{2}{5}x_3, \\ y_3 = x_3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{6}{5}y_3, \\ x_2 = y_2 + \frac{2}{5}y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$



Определим положительный r_+ и отрицательный r_- индексы и ранг r квадратичной формы по её каноническому виду:

количество положительных коэффициентов $r_+ = 2$,

количество отрицательных коэффициентов $r_- = 1$,

общее количество ненулевых коэффициентов в каноническом виде

$$r = \text{rang}(\varphi) = 3.$$