ЛЕКЦИЯ 9

ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Лектор: Морозова Татьяна Анатольевна

Общее уравнение плоскости.
Уравнение плоскости через заданную точку перпендикулярно заданному вектору.
Уравнение плоскости через точку параллельно двум заданным векторам.
Уравнение плоскости через три точки, не лежащие на одной прямой.
Взаимное расположение двух плоскостей. Угол между плоскостями.

Поверхность в пространстве задаётся уравнением n-ой степени и называется соответственно поверхностью n-ого порядка.

Уравнение первого порядка определяет в пространстве плоскость. Докажем теорему:

Теорема об общем уравнении плоскости.

Всякая плоскость в пространстве имеет своим уравнением в декартовых координатах уравнение первой степени вида $\boldsymbol{Ax+By+Cz+D=0}$**,**
A,B,C,D$\in R$. И обратно, если постоянные A,B,C одновременно не равны нулю, то существует плоскость, уравнением которой является уравнение $Ax+By+Cz+D=0$.

Доказательство.

1) Напишем уравнение плоскости P. Пусть точка $M_0(x_0,y_0,z_0)\in P$ и $\vec{n}$ ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости:
$\vec{n}\perp P$. Тогда для любой точки плоскости $M(x,y,z)\in P$ вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\vec{n}$. Необходимым и достаточным условием перпендикулярности векторов является равенство нулю их скалярного произведения: $\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n}\Leftrightarrow(\overrightarrow{M_0M},\vec{n})=0\ (*)$

Пусть вектор $\vec{n}$ имеет в базисе $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ координаты (A,B,C)= $\vec{n}$. Тогда, в силу того, что $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ уравнение $(*)$ в координатной форме запишется так:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Leftrightarrow$$

$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$$

или
$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Первая часть теоремы доказана.

2) Дано уравнение первого порядка $Ax + By + Cz + D = 0$. Пусть x_0, y_0, z_0 - какое-нибудь решение этого уравнения. Тогда, подставив x_0, y_0, z_0 вместо x, y, z, получим $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$; $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Подставим это выражение в уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$ вместо свободного коэффициента и получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

или, в векторной форме $(\overrightarrow{M_0M}, \vec{n}) = 0$.

Отсюда следует, что все точки плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$ (и только они), удовлетворяют уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$ и, следовательно, оно является уравнением плоскости.

Теорема доказана.

Вектор $\vec{\boldsymbol{n}}$, перпендикулярный плоскости, называется ***нормальным вектором*** плоскости или ***нормалью*** плоскости.

Уравнение $\boldsymbol{Ax+By+Cz+D=0}$ называется *общим уравнением* плоскости.

Геометрический смысл коэффициентов при x, y, z в общем уравнении плоскости (A,B,C) - это координаты нормального вектора этой плоскости в базисе $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$.

Расположение плоскости относительно системы координат.

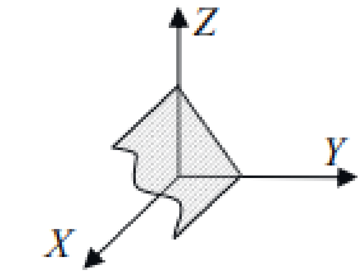
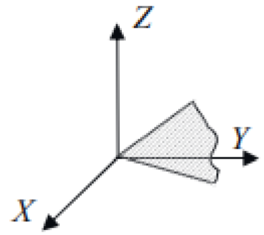
Итак, общее уравнение плоскости $P: Ax + By + Cz + D = 0$. Рассмотрим частные случаи, когда некоторые коэффициенты уравнения первой степени равны нулю, и выясним особенности расположение плоскости относительно системы координат.

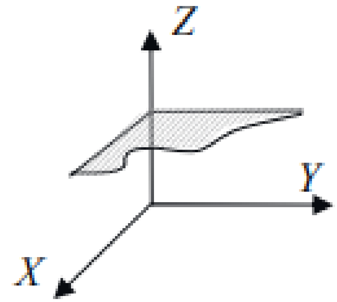
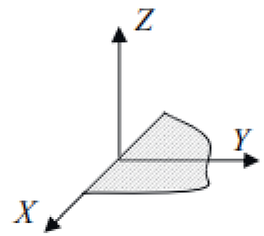
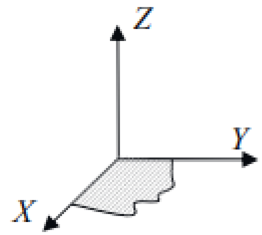
1. Пусть свободный коэффициент в уравнении равен нулю: $D = 0$. Тогда уравнение примет вид $Ax + By + Cz = 0$ и будет определять плоскость, проходящую через начало координат - точку с нулевыми координатами O(0,0,0) ($x = 0, y = 0, z = 0$ удовлетворяют уравнению плоскости).

2. Если $A = 0$, то уравнение примет вид $By + Cz + D = 0$. Нормальный вектор плоскости, определяемой этим уравнением, имеет координаты
$\vec{\boldsymbol{n}}(0, B, C)$ и перпендикулярен вектору $\vec{\imath}(1,0,0)$: $(\vec{\imath}, \vec{\mathrm{n}}) = 0$, значит плоскость параллельна оси OX.

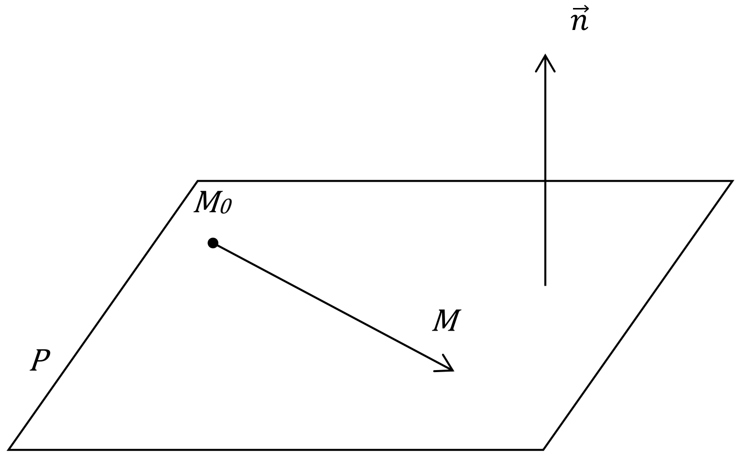
Все случаи опишем коротко:

Частные случаи положения плоскости в пространстве

№		**Положение плоскости и вид общего уравнения**
1.	Плоскость параллельна координатной оси $OX: By + Cz + D = 0 \ (A = 0)$ $OY: Ax + Cz + D = 0 \ (B = 0)$ $OZ: Ax + By + D = 0 \ (C = 0)$	 $By + Cz + D = 0$
2.	Плоскость проходит через начало координат $Ax + By + Cz = 0 \ (D = 0)$	

3.	Плоскость параллельна координатным осям OX и OY: $Cz + D = 0$ $(A = B = 0)$ OX и OZ: $By + D = 0$ $(A = C = 0)$ OY и OZ: $Ax + D = 0$ $(B = C = 0)$	 $Cz + D = 0$
4.	Плоскость проходит через ось OX: $By + Cz = 0$ $(A = D = 0)$ OY: $Ax + Cz = 0$ $(B = D = 0)$ OZ: $Ax + By = 0$ $(C = D = 0)$	 $By + Cz = 0$
5.	Уравнения координатных плоскостей XOY: $z = 0$ $(A = B = D = 0)$ XOZ: $y = 0$ $(A = C = D = 0)$ YOZ: $x = 0$ $(B = C = D = 0)$	 $z = 0$

Различные постановки задач, приводящие к общему уравнению плоскости.



1. **Уравнение плоскости через заданную точку перпендикулярно заданному вектору.**

Пусть заданы точка, принадлежащая плоскости,
(такая точка называется начальная точка плоскости)
$M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$, и нормаль к плоскости $\vec{n}(A, B, C) \perp P$.
Тогда $\forall M(x, y, z) \in P$:

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \perp \vec{n}(A, B, C) \Leftrightarrow \left(\vec{n}, \overrightarrow{M_0M}\right) = 0$$

$$\boldsymbol{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

Это уравнение плоскости через данную точку перпендикулярно данному вектору.
Раскрыв скобки и вычислив свободный коэффициент, мы получим общее уравнение плоскости.

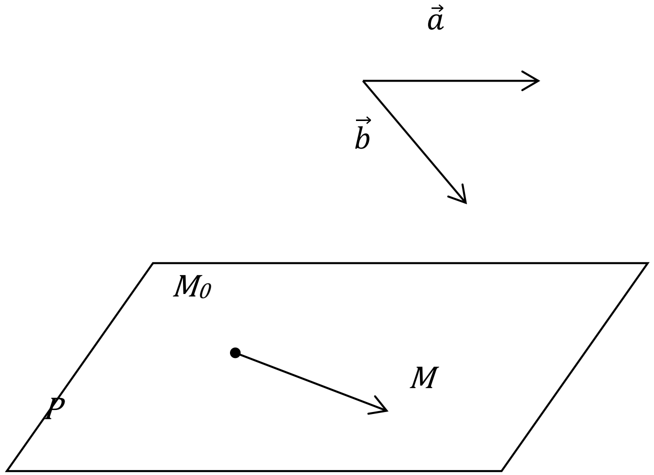
Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1; 0; -3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (2; -1; 4)$.

$2(x-1) - 1(y-0) + 4(z+3) = 0;$

Ответ: $\boldsymbol{2x - y + 4z + 10 = 0}$

2. Уравнение плоскости через заданную точку параллельно двум неколлинеарным векторам.

Пусть даны начальная точка плоскости $M_0(x_0, y_0, z_0) \in P$ и два неколлинеарных вектора: $\vec{a}(a_1, a_2, a_3), \vec{b}(b_1, b_2, b_3), \vec{a}$ неколлинеарен $\vec{b}$.



Тогда $\forall M(x, y, z) \in P \leftrightarrow$ векторы $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \vec{a}, \vec{b}$ компланарны $\Leftrightarrow$ их смешанное произведение равно нулю:

$$\left(\overrightarrow{M_0M}, \vec{a}, \vec{b}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x - x_0} & \boldsymbol{y - y_0} & \boldsymbol{z - z_0} \\ \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{b_3} \end{vmatrix} = \boldsymbol{0}$$

Это и есть **уравнение плоскости через заданную точку параллельно двум неколлинеарным векторам**. Раскрыв этот определитель по первой строке и приведя подобные слагаемые, снова получим общее уравнение плоскости.

Можно решить эту задачу другим способом.

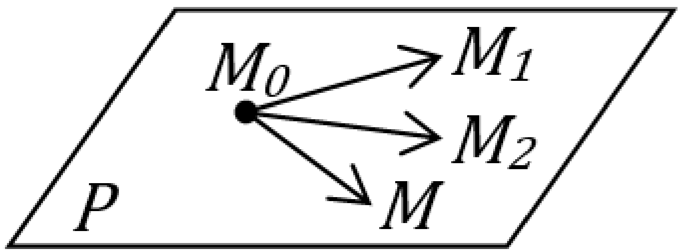
Сначала найдем уравнение нормали к плоскости. Одним из таких векторов, который ортогонален $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а следовательно и плоскости, им параллельной, будет векторное произведение

$$[\vec{a}\,,\vec{b}] = \vec{n} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{a_3} \\ \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{b_3} \end{vmatrix} = \boldsymbol{Ai} + \boldsymbol{Bj} + \boldsymbol{Ck},$$

Далее задача сводится к предыдущей – составить уравнение плоскости, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору.

3. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, не лежащие на одной прямой.

Пусть даны три точки, не принадлежащие одной прямой: $M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$. Составим уравнение плоскости. Для этого сведём задачу к предыдущей: возьмём в качестве начальной точки M_0, а неколлиненарные векторы, параллельные плоскости, это
$\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$
и $\overrightarrow{M_0M_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$.



Тогда $\forall M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow$ три вектора компланарны:
$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0), \overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ и

$$\overrightarrow{M_0M_2} = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0),$$

$\Leftrightarrow$ их смешанное произведение равно нулю. В координатной форме:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x - x_0} & \boldsymbol{y - y_0} & \boldsymbol{z - z_0} \\ \boldsymbol{x_1 - x_0} & \boldsymbol{y_1 - y_0} & \boldsymbol{z_1 - z_0} \\ \boldsymbol{x_2 - x_0} & \boldsymbol{y_2 - y_0} & \boldsymbol{z_2 - z_0} \end{vmatrix} = \boldsymbol{0}$$

Это и есть **уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, не лежащие на одной прямой.** Раскрыв этот определитель, получим общее уравнение плоскости. Удобнее раскрывать данный определитель по первой строке.

Также как и в предыдущей задаче, существует другой способ решения: сначала найти нормаль к плоскости $\vec{n}=[\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}]$ и написать уравнение плоскости, зная точку и нормаль.

Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1;2;3)$, $B(-1;4;6)$ и $C(2;4;5)$.

Решение.

1 способ. Найдем два вектора, параллельных плоскости ABC.

$$\overrightarrow{AB} = (-2;2;3), \overrightarrow{AC} = (1;2;2).$$

В качестве точки плоскости возьмем точку A, хотя можно выбрать любую точку.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель по первой строке, получим:

$$(x-1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

Откуда $(x-1)\cdot(-2) - (y-2)\cdot(-7) + (z-3)\cdot(-6) = 0$.

Раскрывая скобки и приводя подобные, получим окончательно:

$$\boldsymbol{-2x + 7y - 6z + 6 = 0}$$

2 способ. Найдем нормаль к искомой плоскости:

$$\vec{n}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-2i+7j-6k.$$

$$\vec{n}(-2;7;-6)$$

Составим уравнение плоскости, проходящую через точку А (можно выбрать любую точку) и имеющую вектор нормали $\vec{n}(-2;7;-6)$.

$-2(x-1)+7(y-2)-6(z-3)=0$=>

$\boldsymbol{-2x+7y-6z+6=0}$

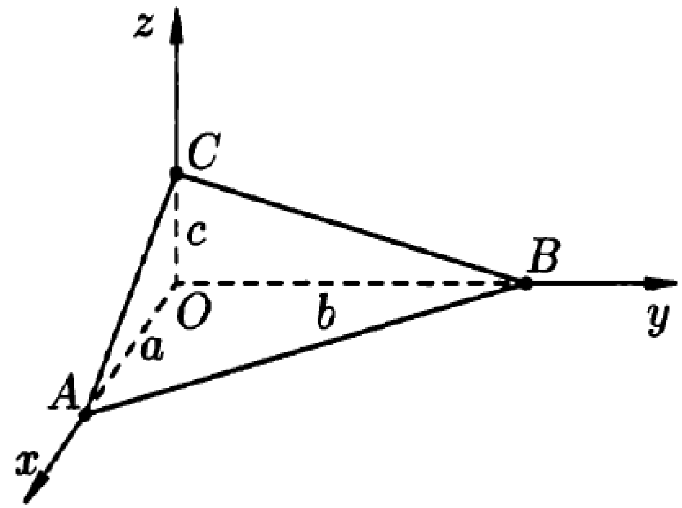
Специальные виды уравнения плоскости.

1. Уравнение плоскости в отрезках.

Пусть плоскость P задана своим общим уравнением:
$P: Ax+By+Cz+D=0$. Если все коэффициенты A, B, C и D отличны от нуля, то уравнение можно привести к специальному виду. Перенесём свободный член D в правую часть уравнения и разделим обе части уравнения на $-D$:

$$Ax+By+Cz=-D, \qquad \frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1.$$

Обозначим $-\frac{D}{A}=\alpha,-\frac{D}{B}=\beta,-\frac{D}{C}=\gamma$ и получим уравнение плоскости в виде:



$$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{\alpha}}+\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{\beta}}+\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{\gamma}}=\mathbf{1}.$$

Числа $\alpha,\beta,\gamma-$ координаты точек, которые отсекает плоскость на координатных осях, они с точностью до знака равны отрезкам, отсекаемым плоскостью на осях координат. Действительно, с осью OX(y=0, z=0) плоскость пересекается в точке A($\alpha, 0{,}0$), с осью OY(x=0, z=0) в точке B(0 $\beta, 0$), с осью OZ(x=0, y=0) в точке C(0,0, γ).

Уравнение $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{\alpha}}+\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{\beta}}+\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{\gamma}}=\mathbf{1}$ называется ***уравнением плоскости в отрезках.***

Пример.

$x-5y+3z-15=0$ => $x-5y+3z=15$=>

$\frac{x}{15}-\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1$- уравнение плоскости в отрезках.

2. **Нормальное уравнение плоскости**.

Пусть плоскость задана своим общим уравнением $P: Ax + By + Cz + D = 0$. Мы знаем координаты нормального вектора к этой плоскости $\vec{n}(A, B, C) \perp P$. Тогда координаты единичного вектора нормали к плоскости

$$\vec{e}_{\vec{n}} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma -$ его направляющие косинусы.

Выберем произвольную точку на плоскости $\mathrm{M}(x; y; z)$. Тогда ее радиус вектор $\overline{OM}$ будет также иметь координаты (x, y, z), а длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость $\mathrm{p} = \text{Пр}_{\vec{e}_{\vec{n}}}\overline{OM} = \frac{(\overline{OM}, \vec{e}_{\vec{n}})}{|\vec{e}_{\vec{n}}|} =$

$(\overline{OM}, \vec{e}_{\vec{n}}) = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$

$\boldsymbol{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0}$ **нормальное уравнение плоскости.**

Для того, чтобы получить нормальную форму уравнения плоскости, достаточно умножить его на нормирующий множитель

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{-\boldsymbol{sgn(D)}}{|\vec{\boldsymbol{n}}|} = \frac{-\boldsymbol{sgn(D)}}{\sqrt{\boldsymbol{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

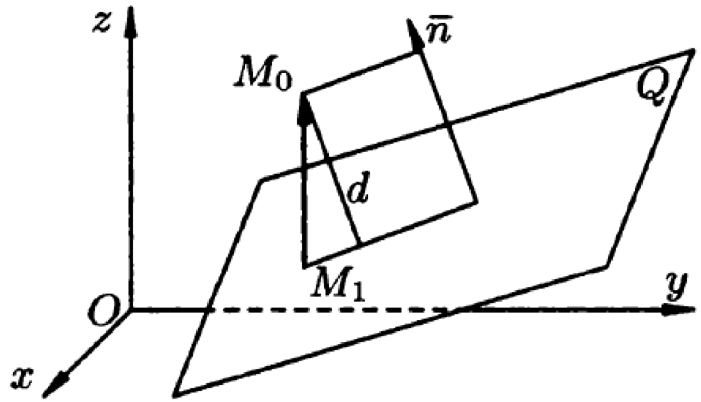
Сумма квадратов коэффициентов при неизвестных в нормальном уравнении плоскости равна единице, так как эти коэффициенты представляют собой косинусы углов, которые нормальный вектор образует с базисными векторами,
p- расстояние от плоскости до начала координат.

Пример. Записать нормальное уравнение плоскости $x - 5y + 3z - 15 = 0$.
Нормирующий множитель: $\mu = \frac{1}{\sqrt{1+25+9}} = \frac{1}{\sqrt{35}}$ =>

$$\frac{x}{\sqrt{35}} - \frac{5y}{\sqrt{35}} + \frac{3z}{\sqrt{35}} - \frac{15}{\sqrt{35}} = 0$$

Расстояние от точки до плоскости.

Пусть дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и плоскость $Q: Ax + By + Cz + D = 0$. Тогда $\vec{n} = (A; B; C)$ – нормальный вектор плоскости Q.



Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – произвольная точка плоскости.

Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q равно модулю проекции вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на вектор нормали $\vec{n} = (A; B; C)$:

$$d = \left|\text{Пр}_{\vec{n}}\, \overrightarrow{M_1M_0}\right| = \left|\frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_1M_0}}{|\vec{n}|}\right| = \left|\frac{A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|.$$

Так как точка $M_1 \in Q$, то $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ и

$-Ax_1 - By_1 - Cz_1 = D$.

Тогда имеем формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.

$$\boldsymbol{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}.$$

Пример. Найти расстояние от точки M(1;-1;2) до плоскости $x - 5y + 3z - 15 = 0$

$$d = \frac{|1+5+6-15|}{\sqrt{1+25+9}} = \frac{3}{\sqrt{35}}$$

Взаимное расположение двух плоскостей.

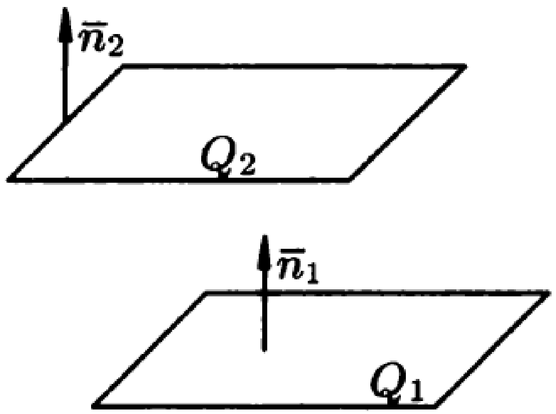
Пусть даны две плоскости:

$$Q_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$Q_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Нормальные векторы этих плоскостей:

$$\overrightarrow{n_1} = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$$
$$\overrightarrow{n_2} = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$$

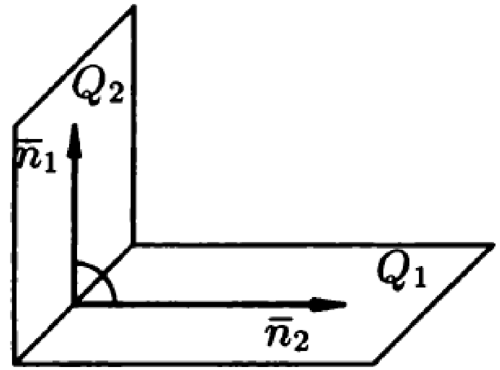
Выясним условия параллельности и перпендикулярности этих плоскостей и найдём формулу угла между плоскостями.



1. Плоскости ***параллельны*** тогда и только тогда, когда их нормали коллинеарны, а значит, координаты нормалей пропорциональны:

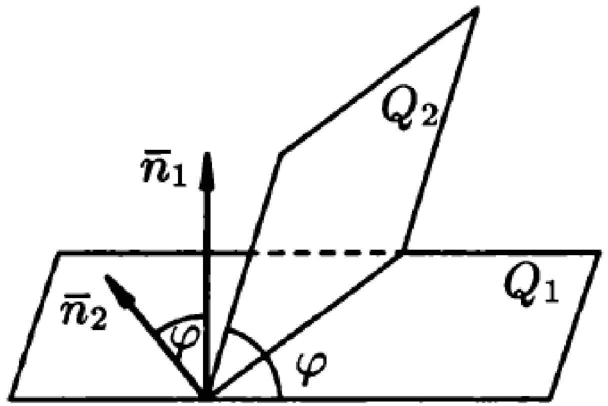
$$\boldsymbol{Q_1 \parallel Q_2 \leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \parallel \vec{n}_2 \leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$$

2. Плоскости ***перпендикулярны*** тогда и только тогда, когда их нормали перпендикулярны, а значит их скалярное произведение равно нулю:



$$\boldsymbol{Q_1 \perp Q_2 \leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}\,.$$

3. Угол между нормалями $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ совпадает с одним из углов, образуемых плоскостями. Известно, что углом между плоскостями считается меньший угол, а значит косинус угла между плоскостями Q_1 и Q_2 равен модулю косинуса угла между нормалями:



$$\mathbf{cos}(\widehat{Q_1, Q_2}) = \left|\mathbf{cos}(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2})\right| = \left|\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\right|.$$

Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M(1;-2;3) и параллельно плоскости $x - 3y + 4z - 7 = 0$.

Решение. Плоскости параллельны, значит нормаль к данной плоскости будет также являться нормалью к исходной плоскости $\vec{n} = (1; -3; 4)$

Составим уравнение плоскости, проходящей через точку M(1;-2;3) и перпендикулярную вектору $\vec{n} = (1; -3; 4)$.

$$1(x-1) - 3(y+2) + 4(z-3) = 0$$

$$x - 3y + 4z - 19 = 0.$$

Пример. Найти угол между плоскостями $2x - 3y + 4 = 0$ и $3x + 4y - z + 5 = 0$

Решение. $\vec{n}_1\ (2; -3; 0)$и $\vec{n}_2(3; 4; -1)$; $\cos\varphi = \frac{|-6|}{\sqrt{13}\sqrt{26}} = \frac{|-6|}{13\sqrt{2}}$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{3}{13}\sqrt{2}\right)$$

Расстояние между двумя параллельными плоскостями.

Расстояние между параллельными плоскостями равно расстоянию от произвольной точки, лежащей на одной плоскости, до второй плоскости. Чтобы найти точку, лежащую на плоскости P_1, положим две координаты равными нулю, тогда третью найдём из уравнения: например,

$y = z = 0 => A_1x + D_1 = 0$, находим x.

Итак, формула расстояния между параллельными плоскостями:

$\rho(P_1, P_2) = \rho(M_1, P_2) = \left|\frac{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\right|$, где $M_1(x_1, y_1, z_1) \in P_1$.

Пример. Исследовать взаимное расположение плоскостей. Если они пересекаются, то найти угол между ними, если они параллельны, то найти расстояние между плоскостями.

$$2x - 3y + z + 1 = 0; \qquad 4x - 6y + 2z + 5 = 0$$

Решение. Выпишем нормали к плоскостям: $\vec{n}_1\ (2; -3; 1)$и $\vec{n}_2(4; -6; 2)$
Легко заметить, что координаты векторов пропорциональны, следовательно они коллинеарны, следовательно плоскости параллельны.
Выберем на первой плоскости точку. Для этого зададим х$= y = 0$ и подставив в уравнение, найдем $z. 0 - 0 + z + 1 = 0 \ => \ z = \ -1$.
Итак, точка M(0;0;-1) принадлежит первой плоскости, тогда воспользуемся формулой и найдем расстояние между плоскостями.

$$\rho(P_1, P_2) = \rho(M, P_2) = \left|\frac{0+0+2(-1)+5}{\sqrt{16+36+4}}\right| = \frac{3}{2\sqrt{14}}$$

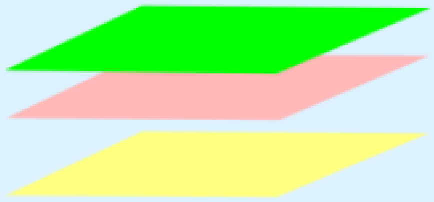
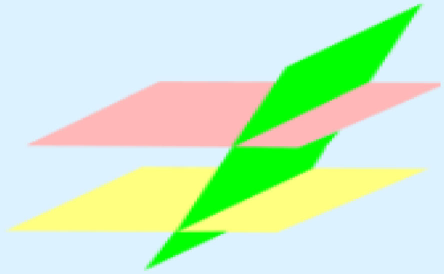
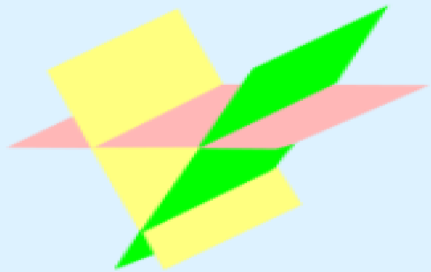
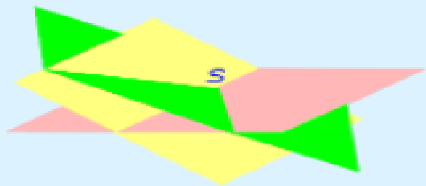
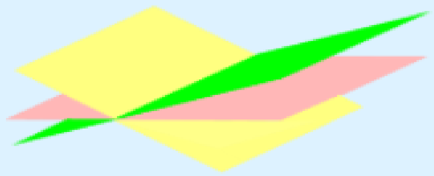
Взаимное расположение трёх плоскостей.

Три плоскости либо пересекаются в одной точке, либо параллельны одной прямой, в частности, проходят через прямую.

Исследование взаимного расположение трёх плоскостей равносильно исследованию совместности неоднородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}.$$

В частности, если определитель этой системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, а значит, три плоскости пересекаются в одной точке, координаты которой и есть решение этой системы.

Три параллельные плоскости		Плоскости **попарно не пересекаются.**
Две параллельные плоскости, пересечённые третьей плоскостью		**Прямые**, по которым третья плоскость пересекает две параллельные плоскости, **параллельны.**
Третья плоскость параллельна линии пересечения первых двух плоскостей		**Прямые**, по которым пересекаются каждые две плоскости, **параллельны.**
Третья плоскость пересекает линию пересечения первых двух плоскостей		Все три плоскости **имеют единственную общую точку** (на рисунке - это точка *S*)
Третья плоскость проходит через линию пересечения первых двух плоскостей		Все три плоскости **имеют общую прямую**

Задача 1. Найти объем треугольной пирамиды, отсекаемой плоскостью, проходящей через точки $A(1;-5;2)$, $B(-6;2;2)$ и $C(1;3;4)$, от координатного угла.

Решение. Составим уравнение плоскости. $\overline{AB}(-7;7;0)$; $\overline{AC}(0;8;2)$

$\vec{n} = [\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -7 & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 14i + 14j - 56k \Longrightarrow \vec{n}$(1;1;-4) – вектор нормали искомой плоскости.

Найти искомое уравнение по формуле: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$,

$$(x-1) + (y+5) - 4(z-2) = 0;\ x + y - 4z + 12 = 0.$$

Запишем уравнение плоскости в отрезках: $\frac{x}{-12} + \frac{y}{-12} + \frac{z}{3} = 1$;

$V = \frac{1}{3} S_{осн} h = \frac{1}{6} 12 \cdot 12 \cdot 3 = 72$

Ответ: 72.

Задача 2.

Указать значение параметра λ, при котором плоскости $2x + 5y - \lambda z - 17 = 0$ и $x + 2y - 6z + 5 = 0$ перпендикулярны.

Решение. Плоскости перпендикулярны ⇔ их нормали перпендикулярны.

$\overline{n_1}(2;5;-\lambda)\perp \overline{n}(1;2;-6)$ ⇔2+10+6 $\lambda = 0$ => λ =-2

Ответ: -2

Задача 3. При каком значении параметра q плоскости $x - y - z - 10 = 0$; $4x + 11z + 43 = 0$ и $3x + y + qz + 53 = 0$ проходят через одну прямую?

Решение.

$$\begin{cases} x - y - z - 10 = 0 \\ 4x + 11z + 43 = 0 \\ 3x + y + qz + 53 = 0 \end{cases};$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 10 \\ 4 & 0 & 11 & -43 \\ 3 & 1 & q & -53 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 4 & 15 & -83 \\ 0 & 4 & q+3 & -83 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 4 & 15 & -83 \\ 0 & 0 & q-12 & 0 \end{array}\right)$$

При $q \neq 12$ система имеет единственное решение, значит плоскости пересекаются в одной точке.

При $q = 12$ система имеет бесконечно много решений. Ранг системы равен 2, значит плоскости пересекаются по прямой.

Задача 4.

При каких значениях параметров a и b плоскости

$4x + az - 4 = 0$, $3x - y + z - 5 = 0$ и $x + y - 3z - b = 0$ проходят через одну прямую? В ответе дать число $a + b$.

Решение.

$$\begin{cases} 4x + az - 4 = 0 \\ 3x - y + z - 5 = 0; \\ x + y - 3z - b = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & b \\ 3 & -1 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & a & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & b \\ 0 & -4 & 10 & 5-3b \\ 0 & -4 & a+12 & 4-4b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & b \\ 0 & 4 & 10 & 5-3b \\ 0 & 0 & a+2 & -1-b \end{array}\right)$$

При $a = -2$ и b= -1 ранг системы равен 2, она имеет бесконечно много решений, а значит плоскости пересекаются по прямой.

-2 -1= -3

Ответ : -3