



ЛЕКЦИЯ 9

Прямая на плоскости

Лектор: Морозова Татьяна Анатольевна



§1 Линия на плоскости

Определение. Линия на плоскости – это множество точек, обладающих некоторым геометрическим свойством. Например, прямая – это бесконечная линия, по которой проходит кратчайший путь между любыми двумя ее точками.

Всякой линии на плоскости соответствует некоторое уравнение $F(x,y)=0$. И всякому уравнению соответствует, вообще говоря, некоторая линия.

Примеры:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4 \quad \text{окружность с центром } O(1;-2) \text{ и } R=2$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0 \quad \text{точка } O(1;-2)$$

$$x^2 + y^2 + 5 = 0 \quad \emptyset$$



Обычно встречаются задачи двух типов:

- 1) Зная геометрические свойства линии, найти ее уравнение;
- 2) Зная уравнение линии, изучить ее свойства.

Параметрическое уравнение линии:

$$x = x(t); y = y(t);$$

x и y – координаты точки $M(x, y)$, принадлежащий линии; t – параметр.
При разных значениях параметра получаем координаты точки.

Пример. $x = t - 2; y = t^2 + 1$

Исключая t , перейдем к уравнению: $y = (x + 2)^2 + 2x + 5$

Но это не всегда удобно и возможно.



§2 Прямая на плоскости.

Теорема. В декартовой прямоугольной системе координат xOy прямая определяется уравнением первой степени $Ax + By + C = 0$ и каждое уравнение первой степени определяет прямую линию.

1. Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0$$

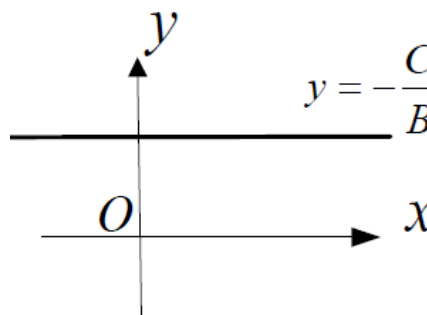
где A, B, C произвольные числа, не равные нулю одновременно.



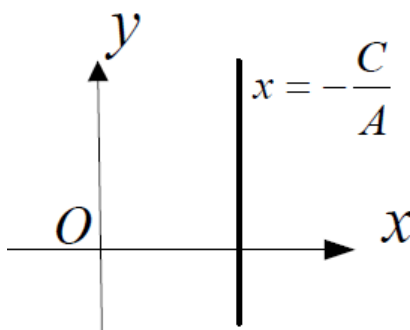
$$Ax + By + C = 0$$

Частные случаи:

1. $A = 0$; $y = -\frac{C}{B}$, прямая $\parallel OX$;

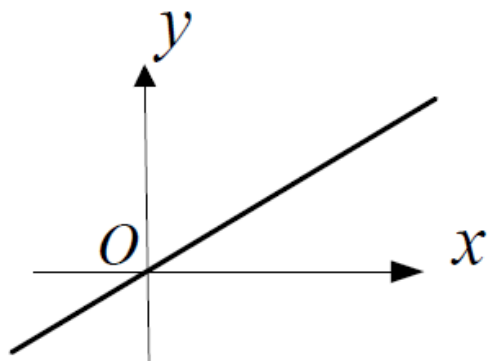


2. $B = 0$; $x = -\frac{C}{A}$, прямая $\parallel OY$;





3. $C = 0$; $Ax + By = 0$; прямая, проходящая через точку $O(0,0)$;



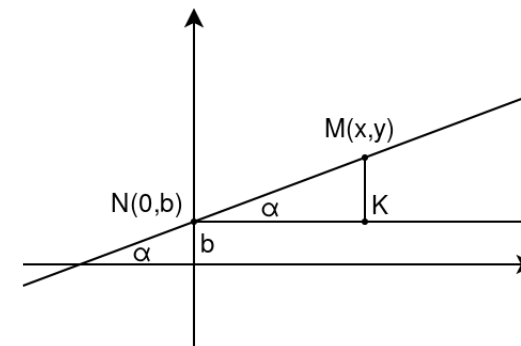
4. $A = C = 0$; $y = 0$ – прямая совпадает с осью OX ;

5. $B = C = 0$; $x = 0$ – совпадает с осью OY .



2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть прямая $L \nparallel OY$. Её положение на плоскости определяется однозначно ординатой b точки $N(0, b)$ пересечения с осью OY и углом α между прямой и положительным направлением оси OX .



$$0 \leq \alpha < 180; NK \parallel OX$$

$M(x, y) \in L$ (любая точка, принадлежащая прямой)

$$\text{из } \triangle MKN \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y-b}{x}$$

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + b; k = \operatorname{tg} \alpha \text{ (угловой коэффициент прямой)}$$

$y = kx + b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Этому уравнению удовлетворяют координаты $\forall$ точки $\in L$ и не удовлетворяют точки $\notin L$.

Если прямая проходит через начало координат ($b = 0$), то ее уравнение $y = kx$



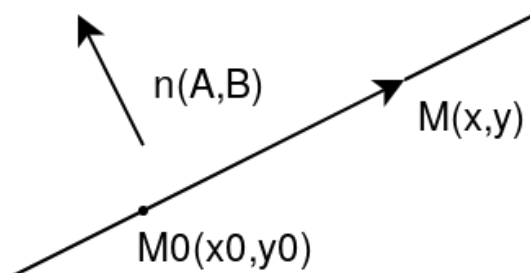
Если прямая $\parallel OY$, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $k \rightarrow \infty$; уравнение: $x = a$.

3. Уравнение прямой проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющую угловой коэффициент k

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

Вывод: в уравнение $y = kx + b$ подставим координаты точки $y_0 = kx_0 + b$,
 $b = y_0 - kx_0$.

4. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и $\perp$ (перпендикулярную) вектору $\vec{n}(A, B)$



Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка $\in M$; $\overline{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$



$$\vec{n} \perp M_0M \Leftrightarrow (\vec{n}, \overline{M_0M}) = 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

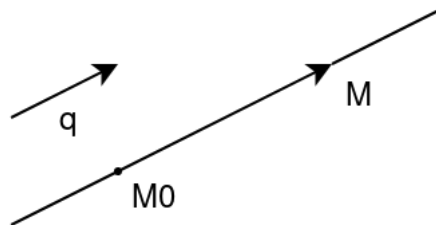
Этому уравнению удовлетворяют координаты $\forall$ точки $\in L$ и не удовлетворяют точки $\notin L$. **Вектор $\vec{n}$ называется вектором нормали к прямой.**

Это общее уравнение прямой, $Ax + By + C = 0$, где $C = -Ax_0 - By_0$.

5. Каноническое уравнение прямой

Найдем уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0, y_0)$ и $\parallel$ данному вектору $\vec{q}(l, m)$; **$\vec{q}$ называется направляющим вектором.**

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка $\in L$.



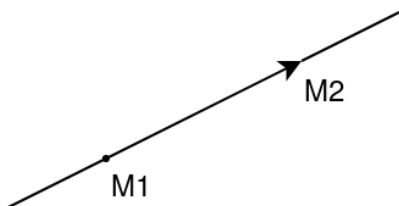


$$M \in L \Leftrightarrow \overline{M_0 M} \parallel \vec{q} \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты $\forall$ точки $\in L$ и не удовлетворяют точки $\notin L$.

Если $m = 0$, то $L \parallel OX$; $y = y_0$; если $l = 0$, то $L \parallel OY$; $x = x_0$

6. Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$



$$\vec{q} = \overline{M_1 M_2}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$



7. Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и параллельно $\vec{q}(l, m)$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}; t \in (-\infty; +\infty) - \text{параметр}$$

Параметрическое уравнение прямой получается из канонического:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t$$

8. Угол между двумя прямыми

Угол между двумя прямыми равен острому углу между нормальями к этим прямым или острому углу между направляющими векторами.

Если прямые заданы общими уравнениями

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \end{aligned}$$



то $\vec{n}_1(A_1, B_1)$, $\vec{n}_2(A_2, B_2)$;

$$\text{Тогда } \cos \varphi = \frac{|\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \left| \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right|$$

Если прямые заданы каноническими (или параметрическими) уравнениями, то мы знаем их направляющие векторы $\vec{q}_1(l_1, m_1)$ и $\vec{q}_2(l_2, m_2)$ и

$$\cos \alpha = \frac{|\langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle|}{|\vec{q}_1| \cdot |\vec{q}_2|} = \left| \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2}} \right|$$

Если прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами, $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ то



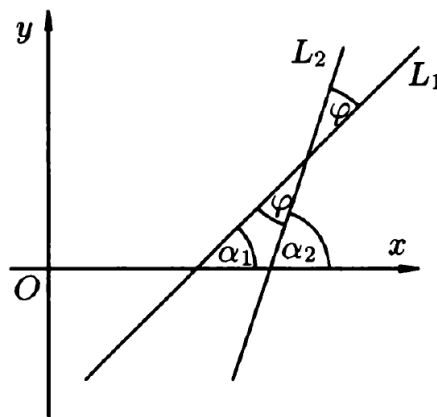
Из рисунка видно, что $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$,

где

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1, \operatorname{tg} \alpha_2 = k_2.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_1} \\ &= \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \end{aligned}$$



Обычно требуется найти острый угол, поэтому справедлива формула:

$$\operatorname{tg} \phi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$

В частности, если угол составляет 90° , то $\operatorname{tg} 90^\circ = \infty$.



Это возможно, если $1 + k_1 k_2 = 0$.

Получаем критерий перпендикулярности прямых

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \quad \text{или} \quad k_1 \cdot k_2 = -1$$

8. Условие параллельности двух прямых

Если прямые заданы общими уравнениями

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

Если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ то прямые совпадают.

Если прямые заданы каноническими (или параметрическими) уравнениями, то мы знаем их направляющие векторы $\vec{q}_1(l_1, m_1)$ и $\vec{q}_2(l_2, m_2)$ и



$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{q_1} \parallel \overrightarrow{q_2} \Leftrightarrow \frac{l_1}{m_1} = \frac{l_2}{m_2}$$

Если прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом.

$$k_1 = k_2$$

9. Условие перпендикулярности двух прямых

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1} \perp \overrightarrow{n_2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) = 0$$

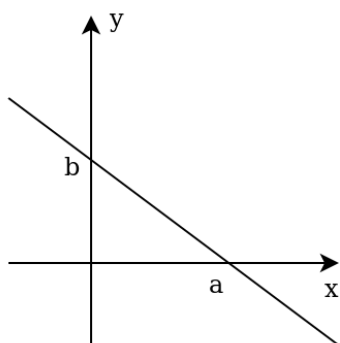
$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{q_1} \perp \overrightarrow{q_2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2}) = 0$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$$



11. Уравнение прямой в отрезках :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



Уравнение прямой в отрезках получается из общего уравнения прямой.

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow Ax + By = -C \Rightarrow \frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1;$$

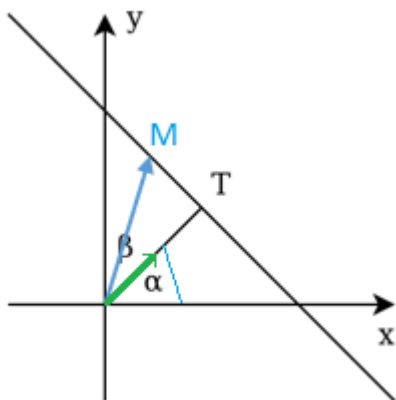
Обозначим $a = -C/A$; $b = -C/B$ и получим уравнение в отрезках.

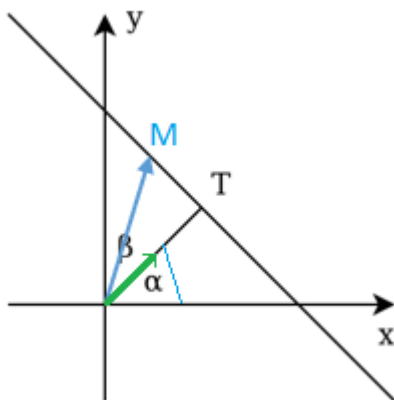


a и b — координаты точек пересечения прямой с осями Ox и Oy соответственно.

12. Нормальное уравнение прямой: $x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0$

Положение произвольной прямой l на плоскости можно определить, если задать p - расстояние до прямой от точки O - начала координат и вектор нормали $\vec{n}$, перпендикулярный прямой l (вектор $\vec{n}$ образует с осью Ox угол α).





Рассмотрим вектор $\vec{n}_0 = \vec{e}_n$ – единичный вектор нормали: $|\vec{n}_0| = 1$ и $\vec{n}_0 = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$.

Если точка $M(x; y)$ – текущая точка прямой l , то проекция ее радиус-вектора на вектор $\vec{n}_0$ есть величина постоянная и равна p :

$$\text{Pr}_{\vec{n}_0} \vec{OM} = \frac{(\vec{OM}, \vec{n}_0)}{|\vec{n}_0|} = (\vec{OM}, \vec{n}_0) = \vec{r} \cdot \vec{n}_0 = p \Rightarrow$$



$$\vec{r} \cdot \vec{n}_0 - p = 0$$

Это уравнение называется **нормальным (нормированным) уравнением прямой в векторной форме**.

Так как $\vec{n}_0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ и $\vec{r} = (x, y)$, то получим:

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

нормальное уравнение прямой в координатной форме.

Для получения из общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ нормального уравнения необходимо общее уравнение умножить на нормирующий множитель:

$$\text{множитель } \mu = \frac{-\operatorname{sgn}(C)}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \text{ где } \operatorname{sgn}(C) = \begin{cases} 1, & \text{если } C > 0 \\ 0, & \text{если } C = 0 \\ -1, & \text{если } C < 0 \end{cases}$$



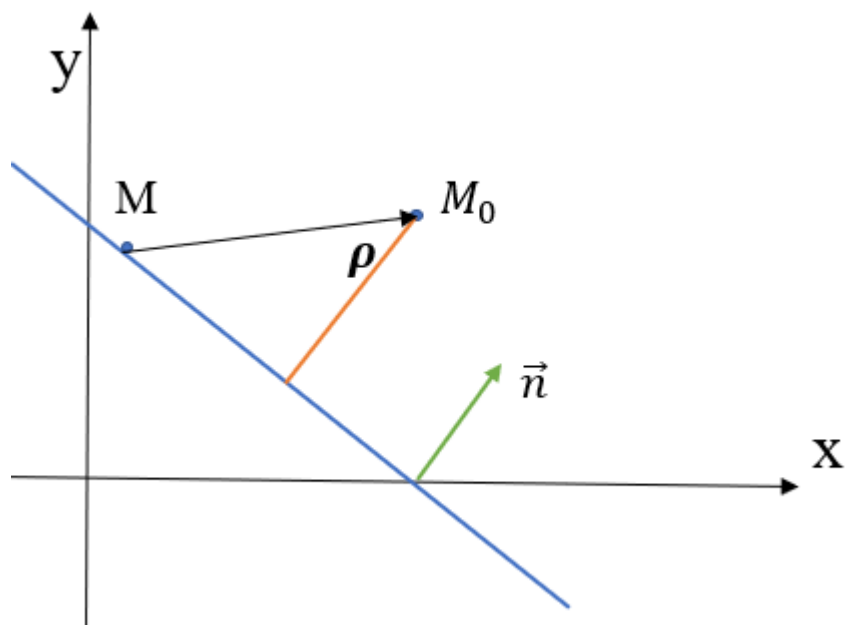
$$\mu Ax + \mu By + \mu C = 0.$$

13. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$

Можно доказать, что расстояние от точки до прямой вычисляется по формуле:

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Рассмотрим произвольную точку $M(x, y)$, принадлежащую прямой и вектор нормали к прямой $\vec{n} = (A, B)$



$$\rho = |\text{Пр}_{\vec{n}} \overrightarrow{MM_0}| = \left| \frac{(\vec{n}, \overrightarrow{MM_0})}{|\vec{n}|} \right| = \left| \frac{A(x_0 - x) + B(y_0 - y)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

Заметим, что $-Ax - By = C$, так как координаты точки M удовлетворяют уравнению прямой $Ax + By + C = 0$.



$$\text{Тогда } \rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

14. Точка пересечения прямых.

Пусть даны две прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Координаты их точки пересечения должны удовлетворять уравнению каждой прямой, т.е. они могут быть найдены из системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Если прямые не параллельны, то система имеет единственное решение.



Задача1 Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(3, -5)$ и

а) $\parallel$ прямой $2x - 3y + 4 = 0$

б) $\perp$ прямой $2x - 3y + 4 = 0$

Решение:

а) Раз прямые параллельны, то у них один и тот же вектор нормали

$\vec{n} = (2; -3)$, следовательно уравнение искомой прямой:

$$2(x - 3) - 3(y + 5) = 0 \Rightarrow 2x - 3y - 21 = 0.$$

Ответ: $2x - 3y - 21 = 0$.

б) искомая прямая перпендикулярна данной, следовательно вектор нормали $\vec{n} = (2; -3)$ будет направляющим вектором для искомой прямой. Составим ее каноническое уравнение:

$$\frac{x - 3}{2} = \frac{y + 5}{-3}$$



Если необходимо составить **параметрические уравнение**, то данное соотношение приравнивается параметру t ;

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{-3} = t \text{ и выразим } x \text{ и } y; \quad x = 3 + 2t; y = -5 - 3t; t \in (-\infty; +\infty)$$

Из канонического уравнения также легко получить **общее**:

$$\begin{aligned} -3(x - 3) &= 2(y + 5) \\ -3x - 2y - 1 &= 0 \Rightarrow 3x + 2y + 1 = 0 \end{aligned}$$

Для получения уравнения **в отрезках** сделаем следующие преобразования:
 $3x + 2y = -1$;

$$\frac{x}{-1/3} + \frac{y}{-1/2} = 1$$



Для получения **нормального уравнения** прямой, необходимо общее уравнение умножить на нормирующий множитель $\mu = \frac{-1}{\sqrt{9+4}} = \frac{-1}{\sqrt{13}}$;

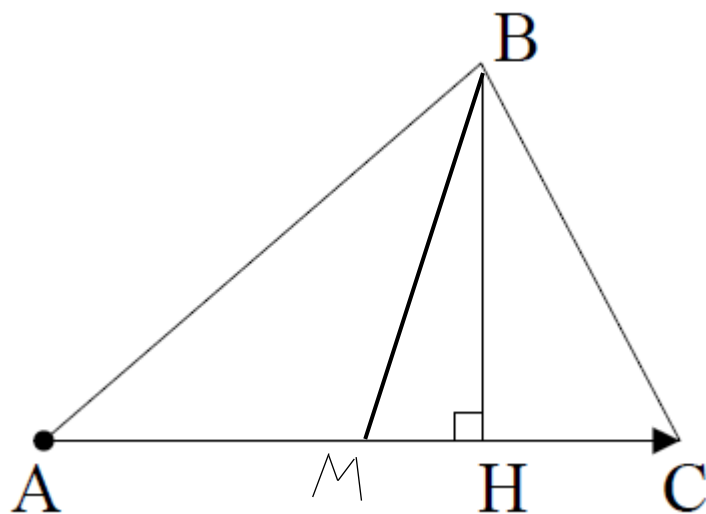
$$\frac{-3}{\sqrt{13}}x + \frac{-2}{\sqrt{13}}y - \frac{1}{\sqrt{13}} = 0.$$

Можно определить расстояние от начала координат до данной прямой $\mathbf{p} = \frac{1}{\sqrt{13}}$.

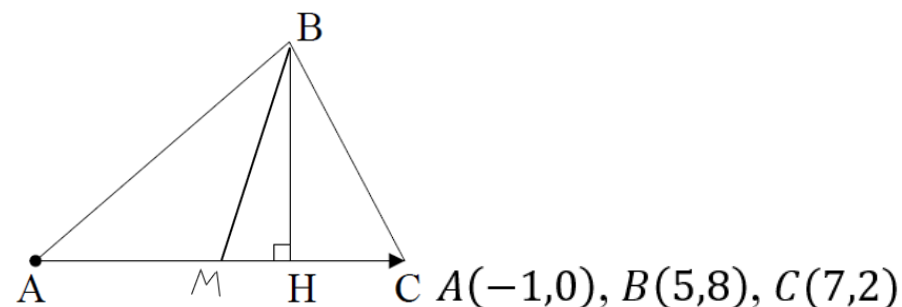


Задача 2. Дан треугольник с вершинами $A(-1,0)$, $B(5,8)$, $C(7,2)$. Найти:

- а) уравнение AC ; б) уравнение медианы BM ;
- в) уравнение высоты BH ; г) длину высоты BH ;
- д) угол между высотой BH и медианой BM



Решение



а) $\vec{q} = \overrightarrow{AC} = (8; 2)$; уравнение AC: $\frac{x+1}{8} = \frac{y}{2}$;

Заметим, что можно выбрать другую точку и другой направляющий вектор.

Например, уравнение может выглядеть так: $\frac{x-7}{4} = \frac{y-2}{1}$

Или: $x - 4y + 1 = 0$

б) M - середина AC, тогда $M(3; 1)$; $\vec{q} = \overrightarrow{BM} = (-2; -7)$. За направляющий вектор можно выбрать $\overrightarrow{BM}$, а можно выбрать противоположный ему вектор.



$A(-1,0), B(5,8), C(7,2)$

уравнение ВМ : $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{7}$; или $7x-2y-19=0$

при написании уравнения использованы координаты точки М, а можно было бы использовать и В.

в) $BH \perp AC \Rightarrow$ за нормаль к ВН можно выбрать $\vec{n} = \overrightarrow{AC} = (8;2);$

Тогда уравнение ВН можно написать по формуле:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$8(x - 5) + 2(y - 8) = 0 \Rightarrow 8x + 2y - 56 = 0 \text{ или } 4x + y - 28 = 0$$

г) длину высоты ВН можно найти по формуле вычисления расстояния от точки В до прямой АС:



$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Для этого запишем уравнение AC в общем виде: $2(x + 1) = 8y$;
 $x - 4y + 1 = 0$;

$$\rho = \frac{|1 \cdot 5 - 4 \cdot 8 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{26}{\sqrt{17}}$$

d) Для нахождения угла между BM и BN выпишем их нормали:

$$\bar{n}_1 = (7; -2); \bar{n}_2 = (4; 1)$$

$$\cos \alpha = \left| \frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1| |\bar{n}_2|} \right| = \frac{|28 - 2|}{\sqrt{49 + 4} \sqrt{16 + 1}} = \frac{26}{\sqrt{53} \sqrt{17}}$$



Также было бы интересно найти уравнение биссектрисы ВЕ. Для нахождения координат точки В можно воспользоваться свойством биссектрисы $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|BA|}{|BC|}$.

Попробуйте решить данную задачу самостоятельно.

Задача 3. Найдите все значения параметра a , при которых прямые $(2a + 2)x + (a + 3)y + \frac{5}{3} = 0$ и $(a + 2)x + (2a + 1)y - \frac{5}{3} = 0$ параллельны (не имеют общих точек).

Решение. Прямые параллельны и не имеют общих точек, если

$$\frac{2a+2}{a+2} = \frac{a+3}{2a+1} \text{ и } \frac{2a+2}{a+2} \neq \frac{\frac{5}{3}}{-\frac{5}{3}}$$

Из этого условия найдем значения параметра a :

$$(2a + 2)(2a + 1) = (a + 3)(a + 2) \Rightarrow$$



$$4a^2 + 6a + 2 = a^2 + 5a + 6 \Rightarrow 3a^2 + a - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -4/3 \end{cases}$$

При $a = 1$ $\frac{2a+2}{a+2} = \frac{4}{3} \neq -1$;

При $a = -\frac{4}{3}$, $\frac{2a+2}{a+2} = \frac{-2/3}{2/3} = -1$. В данном случае прямые совпадают.

Ответ: $a = 1$.



Задача 4. Найдите все значения параметра a , при которых прямые $(2a + 1)x + (2a + 3)y - 1 = 0$ и $(a + 2)x + (3a + 2)y + 1 = 0$ имеют одну общую точку.

Решение

Прямые пересекаются, если $\frac{2a+1}{a+2} \neq \frac{2a+3}{3a+2}$. Из этого условия найдем значения параметра a :

$$\begin{aligned}(2a + 1)(3a + 2) &\neq (2a + 3)(a + 2) \Rightarrow \\ 6a^2 + 5a + 2 &\neq 2a^2 + 5a + 6 \Rightarrow 4a^2 \neq 4 \Rightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq -1 \end{cases}\end{aligned}$$

Ответ: $a \neq \pm 1$.



Задача 5. Точка C делит отрезок AB в отношении $\frac{AC}{CB} = \frac{2}{3}$. Найдите сумму координат точки C , если $A(-4; 3)$, $B(16; -2)$. Если ответ не является целочисленным, запишите его в виде десятичной дроби.

Решение

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}$$
$$x_C = \frac{-4 + \frac{2}{3} \cdot 16}{1 + \frac{2}{3}} = 4, \quad y_C = \frac{3 + \frac{2}{3} \cdot (-2)}{1 + \frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow C(4; 1)$$

Ответ: 5



Задача 6. Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой

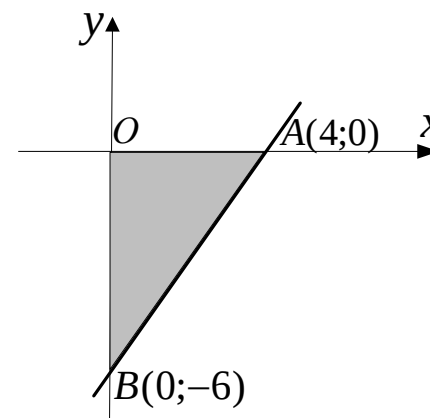
$3x - 2y - 12 = 0$ от координатных осей.

Решение. Запишем уравнение прямой в отрезках:

$$3x - 2y - 12 = 0 \Rightarrow 3x - 2y = 12 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{-6} = 1$$

Прямая отсекает от координатных осей отрезки длины 4 и 6, проходя через точки $A(4; 0)$ и $B(0; -6)$.

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} 4 \cdot 6 = 12$$



Ответ. $S_{AOB} = 12$.