ЛЕКЦИЯ 5.
РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.

§1 Элементарные преобразования системы. Условие совместности системы.

Определение. Две системы линейных уравнений называются эквивалентными, если они обе несовместны или имеют одни и те же решения.

Элементарные преобразования систем.
К элементарным преобразованиям относятся:
1) Перестановка уравнений местами
2) Умножение одного из уравнений на число, отличное от нуля
3) Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.
4)Удаление из системы уравнений, являющихся тождествами для всех x.

Элементарные преобразования системы переводят данную систему в эквивалентную данной.

Теорема Кронекера – Капелли. (условие совместности системы)

(Леопольд Кронекер (1823-1891) немецкий математик; Альфредо Капелли – итальянский математик (1855-1910).

Система *совместна* (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы.

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\tilde{A}).$$

Доказательство.

Для однородной системы $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\tilde{A})$.

Рассмотрим неоднородную систему. Очевидно, что система (*) может быть записана в виде:

$$x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\ \cdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\ \cdots\\ a_{m2}\end{pmatrix}+\ldots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \cdots\\ a_{\mathrm{mn}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ \ldots\\ b_m\end{pmatrix}$$

1) Если решение существует, то столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы A, то есть они являются линейно-зависимыми, а значит добавление этого столбца в матрицу A не изменит ее ранга, rang(A) = rang($\tilde{A}$).

2) Если rang(A) = rang($\widetilde{A}$), то это означает, что они имеют один и тот же <u>базисный минор</u>. Столбец свободных членов – линейная комбинация столбцов базисного минора, т.е. существуют числа $x_1; \ldots x_j; \ldots x_n$, не равные нулю одновременно, такие, что верна запись:

$x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\ \cdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\ \cdots\\ a_{m2}\end{pmatrix}+\ldots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \cdots\\ a_{\mathrm{mn}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ \ldots\\ b_m\end{pmatrix}$, то есть решение существует.

Пусть система совместна (ранг расширенной матрицы равен рангу основной). Пусть r = rangA=rang$\tilde{A}$. Предположим , что отличный от нуля минор матрицы стоит в левом верхнем углу. Иначе поменяем местами уравнения и переменные. Тогда первые r строк матрицы $\tilde{A}$ линейно независимы, т.е. первые r уравнений линейно независимы, а остальные m-r уравнений являются их линейными комбинациями. Достаточно решить первые r уравнений, эти решения будут удовлетворять и остальным уравнениям.

Если система совместна, то возможны два случая:

1. **r = n** (числу неизвестных). Тогда систему, состоящую из первых r уравнений можно решить методом Крамера, (т.к. определитель этой системы не равен нулю), решение существует и единственное, *система совместная и определенная* .

2. **r** < **n**. Тогда возьмем r уравнений и *оставим r базисных неизвестных, соответствующих базисным столбцам*, остальные перенесем в правую часть. *Свободным неизвестным* $x_{r+1},\ldots x_n$ можно придавать какие угодно значения и получать при этом соответствующие значения $x_1 \ldots x_r$. Это случай *совместной неопределенной системы.*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \ldots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{\mathrm{rr}}x_r = b_r - a_{\mathrm{rr}+1}x_{r+1} - \ldots - a_{\mathrm{rn}}x_n \end{cases}$$

Примеры.

1) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right)$ (вычтем из 2й строки первую, умноженную на 2, и из 3 – й первую) $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right)$ (разделим 3 строку на 2 и поменяем местами со 2-й) $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & -2 & -5 \end{array}\right)$ (из третьей строки вычтем 2-ю, умноженную на 7) $\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \end{array}\right)$. Матрица приведена к ступенчатому виду.

rang(A)=rang(Ã)=3=n (числу неизвестных), следовательно система совместная, определенная. Выписываем систему, соответствующую полученной матрицы и начиная с последнего уравнения последовательно находим все неизвестные.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \end{array}\right)$$

$$-9x_3 = 9;\ x_3 = -1.$$

$$-x_2 + x_3 = -2;\ x_2 = x_3 + 2 = -1 + 2 = 1;$$

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1;\ x_1 = -5x_2 - 2x_3 + 1 = -5 + 2 + 1 = -2$$

Убедимся, что неизвестные найдены правильно, подставив их в исходную систему.

Ответ: $x_1 = -2;\ x_2 = 1;\ x_3 = -1.$

2) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 12x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 12 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right)$(вычтем из 2й строки первую, умноженную на 2, и из 3 – й первую)~$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right)$(прибавим к 3-й строчке вторую) ~$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$; Матрица приведена к ступенчатому виду.

rang(A)=2; rang(Ã)=3, система несовместная,

последнее уравнение: $0x_1 + 0x_2 + 0x_3$= -1- абсурд

Ответ: нет решений.

$$3)\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1\\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1\\ x_1-2x_2+x_3+3x_4=3\end{cases}$$

$$\left\langle\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&1&1\\1&-2&1&-1&-1\\1&-2&1&3&3\end{array}\right\rangle\sim\left\langle\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&1&1\\0&0&0&-2&-2\\0&0&0&2&2\end{array}\right\rangle\sim\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}x_1&x_2&[x_3]&[x_4]\end{array}\\ \left\langle\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&1&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right\rangle\end{array}$$

rang(A)= rang(Ã)=2 <n . Совместная неопределенная система.

Выберем базисный минор $\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\neq 0$. Базисные строки – 1 и 2я. Базисные столбцы-3 и 4й. Берем первые 2 уравнения и оставляем слева неизвестные, коэффициенты при которых входят в базисный минор

$$\begin{cases} x_3+x_4=1-x_1+2x_2\\ \qquad\quad x_4=1\end{cases}$$

$x_4=1;\ x_3=-x_1+2x_2.$

Бесконечно много решений. Можем свободным неизвестным придавать значения различных констант $x_1 = C_1$ $x_2 = C_2$;
$x_3 = -C_1 + 2C_2$; $x_4 = 1$ и получать разные решения.

∮ 2 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

(Фридрих Гаусс-немецкий математик 18 век)

Метод Гаусса - это метод последовательного исключения неизвестных.
Пусть дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots a_{1_j}x_j + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{i1}x_1 + \ldots a_{\mathrm{ij}}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{m_j}x_j + \ldots + a_{\mathrm{mn}}x_n = b_m \end{cases}$$

Метод Гаусса состоит из 2-х этапов.

1 этап-прямой ход: приведение системы с помощью элементарных преобразований к ступенчатому виду.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \widetilde{a_{22}}x_2 + \dots + \widetilde{a_{2n}}x_n = \widetilde{b_2}\,; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\, \widetilde{a_{rr}}x_r + ..\widetilde{a_{rn}}x_n = \widetilde{b_r} \end{cases} \qquad \mathrm{r} \le n;\ a_{\mathrm{ii}} \ne 0$$

2 этап: обратный ход: последовательное определение неизвестных.

Опишем подробнее.

Прямой ход:

Пусть $a_{11} \neq 0$, иначе переставим местами уравнения.

Выпишем расширенную матрицу системы $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & & b_m \\ a_{21} & \dots & \dots & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{\mathrm{mn}} & & b_m \end{array}\right)$.

Применим к матрице элементарные преобразования. Элементарные преобразования матрицы будут тождественны элементарным преобразованиям системы. Преобразуем ее, обнулив в первом столбце все элементы кроме первого, что соответствует исключению первого неизвестного из всех уравнений, кроме первого .

Для этого умножим первую строку на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и сложим почленно со второй, затем умножим 1-ю строку на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и сложим с третьей. Продолжая процесс, получим матрицу, эквивалентную исходной:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} & \bigg| & b_m \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \dots & \widetilde{a_{2n}} & \bigg| & \widetilde{b_2} \\ 0 & \dots & \dots & & \bigg| & \dots \\ 0 & \widetilde{a_{m2}} & \widetilde{a_{mm}} & & \bigg| & \widetilde{b_m} \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом, считая $\widetilde{a_{22}} \neq 0$, обнулим второй столбец во всех строках, кроме первой и второй, что соответствует исключению x_2 из всех уравнений системы, кроме первого и второго и т.д. Продолжаем процесс, пока это возможно. После приведения системы к ступенчатому виду, появляются нулевые строки. Они отбрасываются.

Если появятся уравнения вида $0=b_i$, где $b_i \neq 0$, то система несовместна (ранг расширенной матрицы > ранга основной)

Обратный ход:

Полученная в результате прямого хода алгоритма Гаусса ступенчатая форма расширенной матрицы отвечает линейной системе, эквивалентной исходной. Получили r уравнений, где r = рангу расширенной матрицы.

1) *Рассмотрим случай* $r<n$. Выбираем базисный минор (неравный нулю), его образуют линейно-независимые столбцы. Все остальные столбцы представимы в виде линейной комбинации базисных. *Неизвестные, соответствующие r базисным столбцам - базисные, остальные – свободные*. Присваиваем свободным (n-r) неизвестным значения констант $C_1,\ldots$ Cn-r . Далее выражаем базисные неизвестные через свободные, начиная с последнего уравнения.

2) Если r(A)=r($\widetilde{A}$)=n, (основная матрица системы треугольная), то исходная система имеет единственное решение.

Переходим от матрицы к уравнениям . Последнее ур-е: $\widetilde{\widetilde{\widetilde{a_n}}}x_n = \widetilde{\widetilde{\widetilde{b_n}}}$. Из последнего уравнения выражаем x_n, из предпоследнего x_{n-1}; и.т.д.

Пример.

$$\begin{cases} 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +x_4 = & 3 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 = & 3 \\ 3x_1 & -3x_2 & +2x_3 & +3x_4 = & 5 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & +3x_4 = & 4 \end{cases};$$

Прямой ход. Расширенная матрица имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Переставим местами первую и вторую строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right);$$

умножая первую строку на подходящие числа и прибавляя ее к другим строкам, получим нули в первом столбце:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 7 \end{array}\right);$$

разделим вторую строку на (-3) и поставим ее на последнее место.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

к 3-ей строке прибавим вторую, умноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

к 4-ой строке прибавим 3-ю:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} [x_1] & C & [x_3] & [x_4] \end{array} \end{array}$$

Ранг расширенной матрицы равен рангу основной, $r(A)=r(\tilde{A})=3$.

Система совместна. Отбросим нулевую строку. Выберем базисный минор.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. 1,3,4 -ые столбцы – базисные.

Им соответствуют базисные неизвестные x_1, x_3 , x_4, свободная $x_2 = C$.

(Можно было бы выбрать в качестве базисных неизвестных x_2, x_3 , x_4)

Обратный ход:

Выражаем базисные неизвестные, начиная с последнего уравнения, перенося свободные неизвестные в правую сторону.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{cccc} [x_1] & C & [x_3] & [x_4] \end{array}$$

x_2=C; x_4=1

-x_3= - 4+3x_4= -4+3= -1,⇒ x_3=1

x_1= 3- 2x_4- x_3+C=3-2-1+C=C ⇒ x_1=C.

Ответ: $\begin{pmatrix} C \\ C \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

∮3 Однородные системы

Однородные линейные уравнения, это линейные уравнения, у которых правые части равны нулю.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots a_{1_j}x_j + \dots a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + \dots a_{\mathrm{ij}}x_j + \dots + a_{in}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{m_j}x_j + \dots + a_{\mathrm{mn}}x_n = 0 \end{cases}$$

Такая система всегда совместна, так как rang(A) = rang($\tilde{A}$).

Она имеет, например, нулевое решение:

x_1=0, x_2=0,… x_n=0. Нулевое решение называется *тривиальным решением.*

Важно выяснить, при каком условии однородная система имеет *нетривиальные* решения. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Для того, чтобы однородная система имела нетривиальные решения, необходимо и достаточно, чтобы ее ранг был меньше n-числа неизвестных (rang(A)=r; r<n).

Доказательство:

Обозначим за r ранг матрицы однородной системы. Тогда rang(A) = rang($\tilde{A}$)=r.

Необходимость. Пусть система имеет нетривиальное решение.

Предположим, что r = n (больше чем n ранг не может быть). Тогда систему состоящую из первых r = n уравнений можно решить по правилу Крамера, так как определитель не равен нулю, а следовательно, *решение существует и единственное*, следовательно *это тривиальное решение*.

Это противоречит условию, следовательно r <n.

Достаточность.

Пусть r < n. Тогда система является *неопределенной*, т.е. имеет бесчисленное множество решений, т.е. имеет и нетривиальные решения.

Пусть дана однородная система n уравнений и n неизвестных.

Теорема. Для того, чтобы однородная система из n уравнений с n неизвестными имела нетривиальные решения необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, $\Delta = 0$.

Доказательство.

Необходимость. Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное, а значит тривиальное решение.

Достаточность. Если $\Delta = 0$, то $r(A)=r(\tilde{A})<n$, следовательно система имеет бесконечное множество решений, следовательно бесконечное множество нетривиальных решений.

$\oint$ 4 Фундаментальная система решений.

Рассмотрим однородную систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots a_{1_j}x_j + \dots a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + \dots a_{\mathrm{ij}}x_j + \dots + a_{in}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{m_j}x_j + \dots + a_{\mathrm{mn}}x_n = 0 \end{cases}$$

Пусть t=$\begin{pmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_n \end{pmatrix}$ – какое нибудь нетривиальное решение однородной системы.

Тогда $\begin{pmatrix} \alpha t_1 \\ \dots \\ \alpha t_n \end{pmatrix}$, где $\alpha \in R$ тоже, очевидно, решение системы.

Если $d = \begin{pmatrix} d_n \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}$ =решение, то $\begin{pmatrix} \beta d_n \\ \dots \\ \beta d_n \end{pmatrix}$, где $\beta \in R$ –тоже решение системы.

Тогда линейная комбинация $\alpha \begin{pmatrix} t_1 \\ \dots \\ t_n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} d_n \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}$ тоже будет решением системы.

Это легко увидеть, если записать систему в матричном виде AX=O;

Если At=O и Ad=O, то A$(\alpha t + \beta d) = \alpha At + \beta Ad = O$;

Итак, любая линейная комбинация решений однородной системы также будет ее решением.

Интересно найти линейно независимые решения, через которые выражались бы все остальные решения.

Определение. Линейно независимая система решений E1,E2… Ek называется ***фундаментальной,*** если каждое решение системы является линейной комбинацией решений E1,E2,… Ek.

Теорема. Если ранг r = rang(A) матрицы коэффициентов однородной системы уравнений меньше n - числа неизвестных, (r<n), то эта система обладает фундаментальными системами решений, состоящими из (n-r) решений.

Доказательство. Пусть r < n, и пусть для определенности минор порядка r, стоящий в левом верхнем углу матрицы A отличен от нуля. Перенесем свободные неизвестные x_{r+1},...x_n в правые части, получим систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \dots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{\mathrm{rr}}x_r = -a_{\mathrm{rr+1}}x_{r+1} - \dots - a_{\mathrm{rn}}x_n \end{cases}$$

Придавая свободным неизвестным значения $x_{r+1} = 1, x_{r+2} = 0,\ldots x_n = 0$ получим соответствующие значения $x_1 = t_1,\ldots x_r = t_r$ первых r неизвестных.

Получаем столбец решений E1= $\begin{pmatrix} t_1 \\ . \\ t_r \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$

Аналогично, придавая свободным неизвестным $x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1,\ldots x_n = 0$ и вычисляя $x_1 = d_1,\ldots x_r = d_r$, получим столбец решений

$$E2 == \begin{pmatrix} d_1 \\ . \\ d_r \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Так получим всего k= n-r решений:

$$E1 = \begin{pmatrix} t_1 \\ . \\ t_r \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix};\ E2 == \begin{pmatrix} d_1 \\ . \\ d_r \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix};\dots\dots\ Ek = \begin{pmatrix} w_1 \\ . \\ w_r \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Эти решения линейно независимые, так как ранг матрицы, состоящий из k столбцов решений равен k, так как есть минор k-го порядка, неравный нулю. Например, минор, содержащий последние k строк:

$$\begin{pmatrix} t_1 & d_1 & \dots & w_1 \\ t_2 & d_2 & \dots & w_2 \\ \dots & \dots & \dots. & \dots \\ t_r & d_r & \dots & w_r \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы нашли (n-r) линейно-независимых решений.

Примем без доказательства, что любое решение системы можно выразить через E1…Ek.

Тогда E1…Ek будет фундаментальной системой решений (сокращенно ФСР).

Заметим, что можно было бы придавать свободным неизвестным другие значения. Лишь бы только соответствующий определитель к-го порядка был не равен нулю.

Таким образом можно найти сколько угодно других фундаментальных систем из k=n-r решений.

Можно доказать что любая фундаментальная система решений будет состоять ровно из к = (n-r) решений.

Таким образом, можно сказать, что

общее решение системы линейных однородных уравнений *имеет вид* $X_{oo} = C_1E1+C_2E2+\ldots+C_k\mathrm{Ek}$, *где E1…Ek- любая фундаментальная системы решений, а* $C_1\ldots$*Ck-произвольные числа.*

∮ 7 Общее решение системы линейных уравнений.

Рассмотрим теперь систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots a_{1_j}x_j + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + \dots a_{\text{ij}}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{m_j}x_j + \dots a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Запишем ее в матричном виде: AX=B

И соответствующую ей систему однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots a_{1_j}x_j + \dots a_{1n}x_n = 0 \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{i1}x_1 + \dots a_{\text{ij}}x_j + \dots + a_{in}x_n = 0 \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{m_j}x_j + \dots + a_{\text{mn}}x_n = 0 \end{cases}$$

В матричном виде: AX=O

Пусть E0=$\begin{pmatrix} q_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ q_n \end{pmatrix}$- решение однородной системы, а E1=$\begin{pmatrix} t_1 \\ \ldots \\ \ldots \\ t_n \end{pmatrix}$ решение неоднородной системы . Подставим в неоднородную систему E0+E1:

A(E0+E1)= AE0+ AE1=B;

Таким образом E0+E1-решение неоднородной системы.

Справедлива следующая

Теорема:

Если E1…En-r- фундаментальная система решений однородной системы , а E0 –частное решение неоднородной системы, то X=E0+C1E1+…+Cn-rEn-r- при любых C является решением неоднородной системы, и наоборот,

для каждого решения неоднородной системы найдутся числа

C1…Cn-r, такие что решения можно представить в виде $X_{он}$=E0+C1E1+…+Cn-rEn-r.

$X_{он}$=Eo+C1E1+…+Cn-rEn-r называется общим решением неоднородной системы.

Таким образом,

Общее решение неоднородной системы равно сумме общего решения соответствующей ей однородной системы и произвольного частного решения системы неоднородной .

Теорема справедлива для любой системы, в том числе и для однородной, при Eo=(0….0).

Для нашего примера (Ответ: $\begin{pmatrix} C \\ C \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$), ФСР состоит из одного вектора, который мы получаем E1= $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Xон}=\begin{pmatrix} C \\ C \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_{\text{ч}}}+C\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Xoo}}$$

Пример . Методом Гаусса решить с однородную систему.

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +3x & +4x_4 & +5x_5 & =0 \\ 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +5x_4 & +x_5 & =0 \\ 3x_1 & +4x_2 & +5x_3 & +x_4 & +2x_5 & =0 \\ x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +12x_4 & +9x_5 & =0 \\ 4x_1 & +5x_2 & +6x_3 & -3x_4 & +3x_5 & =0 \end{cases}$$

Прямой ход

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 12 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & -2 & -4 & -11 & -13 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -19 & -17 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{array}{ccccc} \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right) \\ \begin{matrix} x1 & x2 & C_1 & x4 & C_2 \end{matrix} \end{array}$$

r=3;базисные переменные x1, x2, x4, свободные x3=C_1, x5=C_2

Обратный ход: $x_4=C_2$, $x_2= -2C_1-3C_2-9C_2= -2C_1-12C_2$.

$x_1= -2x_2-3C_1-4C_2-5C_2= 4C_1+24C_2-3C_1-9C_2= C_1+15C_2$

Фундаментальную систему решений можно получить, придавая поочередно $C_1=1$ $C_2=0$; $C_1=0$, $C_2=1$.

$$X00=\begin{pmatrix} C_1+15C2 \\ -2C_1-12C2 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_2 \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} 15 \\ -12 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Необходимо сделать проверку, подставив найденные неизвестные в исходную систему.

Например, подставив решение в 1-е уравнение, получим:

$C_1+15C2+2(-2C_1-12C2)+3C_1+4C_2+5C_2=0$

Необходимо делать полную проверку, то есть подставлять решение в каждое уравнение.

Пример.

Решим неоднородную систему.

$$\begin{cases} 6x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +4x_5 & = 5 \\ 4x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & +3x_5 & = 4 \\ 4x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +x_5 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +7x_3 & +3x_4 & +2x_5 & = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -14 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -7 & -12 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Выберем базисные неизвестные : $x_1; x_3; x_4$.

Тогда свободные: $x_2 = C_1; x_5 = C_2$;

Базисные переменные выражаем через свободные, начиная с последнего уравнения. Из (3) $2x_4$=12-7C_2; x_4=6-7/2C_2;

Из (2) ур-я x_3- C_2= -2, x_3= -2+C_2

Из (1) 2x_1=1-C_1-7x_3-3x_4-2C_2=1-C_1-2C_2-7(-2+C_2)-3(6-7/2C_2)=
-3-C_1+3/2C_2

x_1= -3/2-C_1/2+3/4C_2

Необходимо сделать проверку, подставив найденные неизвестные в исходную систему.

$$\text{Ответ: } X_{\text{ОН}} = \begin{pmatrix} -3/2 - C_1/2 + 3/4C_2 \\ C_1 \\ -2 + C_2 \\ 6 - 7/2C_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{\text{ч}}} + \underbrace{C_1 \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3/4 \\ 0 \\ 1 \\ -7/2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_{oo}}$$

Можно сделать проверку в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 \\ 0 \\ 1 \\ -7/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$