ЛЕКЦИЯ 4

РАНГ МАТРИЦЫ. БАЗИСНЫЙ МИНОР.
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

∮ 1 Ранг матрицы.

Рассмотрим прямоугольную матрицу, состоящую из n строк и m столбцов. [nxm]. Выделим в этой матрице какие либо k строк и k столбцов. Из элементов, стоящих на пересечении этих k строк и k столбцов составим определитель k-го порядка. Все такие определители называются минорами k-го порядка матрицы.

Пример: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; $M_2^1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$; $M_2^2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

Определение. ***Рангом матрицы*** называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Если ранг матрицы равен r, то среди миноров этой матрицы есть по крайней мере один минор порядка r, отличный от нуля, в то время как все миноры порядка (r+1) и выше равны нулю или таковых нет.

Определение. ***Базисным минором*** называется минор порядка r-ранг матрицы, не равный нулю. В матрице может быть несколько различных базисных миноров. **Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются базисными.**

Замечание. Если все миноры k-го порядка матрицы A равны нулю, то равны нулю и все миноры k+1 порядка.

Пример. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим все миноры 3-го порядка:

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0;$ $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0;$ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0;$ $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0;$ все они равны нулю. Рассмотрим миноры 2го порядка :

$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$ Не все равны нулю, следовательно r(A)=2. Всего имеется 18 миноров 2 порядка, так что без определенного правила нахождения ранга матрицы не обойтись.

Правило вычисления ранга матрицы. **Метод окаймляющих миноров**. При вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если уже найден минор к-го порядка матрицы А, отличный от нуля, то требуется вычислить лишь миноры к+1 порядка, окаймляющие этот минор, т.е. содержащие его целиком внутри себя, а если они все равны нулю, то ранг матрицы равен к.

Пример. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. Рассмотрим миноры второго порядка. Левый верхний равен нулю. Рассмотрим $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Рассмотрим окаймляющий его минор 3-го порядка $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$. Рассмотрим окаймляющие его миноры четвертого порядка. Оба равны нулю, следовательно и ранг матрицы r(A)=3.

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0;$$

Мы видим, что вычисления очень трудоемкие, следовательно необходим другой способ вычисления ранга матрицы.

∮2 Элементарные преобразования матрицы.

Элементарные преобразования матрицы:

1. Транспонирование
2. Перестановка двух строк или двух столбцов
3. Умножение всех элементов строки или столбца на любое число, отличное от нуля.
4. Прибавление ко всем элементам строки или столбца соответствующих элементов параллельного ряда, умноженного на число.

Матрицы, полученные в результате элементарных преобразований, называются ***эквивалентными.***

Надо отметить, что ***равные*** матрицы и ***эквивалентные*** матрицы - понятия совершенно различные.

Теорема. При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.

Доказательство. Рассмотрим каждое преобразование отдельно.

1. По свойству1 определителей каждый минор транспонированный матрицы равен некоторому минору данной матрицы и обратно.
2. После перестановки двух строк или столбцов матрицы А мы приходим к новой матрице, каждый минор которой либо равен некоторому минору матрице А, либо отличается от некоторого минора матрицы А только знаком.
3. При умножении всех элементов строки или столбца матрицы на число С, одни миноры не изменятся, а другие умножаются на ***C***, но так как С не равно 0, то наивысший порядок отличного от нуля минора этой матрицы не изменится.

4. Рассмотрим матрицу B, получающуюся из матрицы A прибавлением ко всем элементам ее i-го столбца соответствующих элементов к-го столбца , умноженного на ***c***:

$$\begin{pmatrix} \dots & a_{1i} + ca_{1k} \dots & a_{1k} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{\mathrm{mi}} + ca_{\mathrm{mk}} \dots & a_{\mathrm{mk}} & \dots \end{pmatrix}$$

Рассмотрим миноры матрицы B порядка выше r и докажем что они равны нулю, то есть rang(B) $\le$ rang(A).

-Если миноры порядка больше r матрицы B не содержат столбца i то они совпадают с минорами A и следовательно равны нулю.

-Если они содержат i-й и k-й столбец, то по свойству 8 определителей (если к одному столбцу прибавляется другой, умноженный на число, определитель не меняется) совпадают с минорами матрицы A и равны нулю.

-Если они содержат i-й столбец и не содержат к-й, то его по свойству 7 можно представить в виде суммы 2-х определителей, один равен минору матрицы А, а другой минору матрицы А, умноженному на число с (или –с, если к-й столбец стоит не на своем месте), следовательно равен нулю.

Таким образом каждый минор В порядка выше r равен нулю, то есть ранг матрицы не может повысится.

Ясно, что он не может и понизится, так как в противном случае при обратном преобразовании он бы повысился.

Определение. Матрица имеет ***ступенчатый вид,*** если:

Нулевые строки матрицы (если они есть) являются ее последними строками и в каждой строке матрицы, начиная со второй, первый слева не равный нулю элемент расположен правее первого слева неравного нулю элемента предыдущей строки матрицы

Нетрудно убедиться, что с помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к ступенчатому виду, после этого достаточно посчитать количество ненулевых строк, это и будет рангом матрицы.

Определить ранг матрицы.

Пример. Определить ранг матрицы

а) A=$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ (вычтем из 1-й строки вторую) ~ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

(из второй удвоенную первую) ~ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

(прибавим к 3ей строке 2-ю) ~

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ранг полученной матрицы r =2, так как есть определитель 2-го порядка, не равный нулю, а любой определитель 3-го порядка равен нулю. Следовательно, r = rang(A) = 2.

В качестве базисного минора можно выбрать, например $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$, или $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}$, или $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -5 \end{vmatrix}$. Возможны и другие варианты. Подойдут все миноры второго порядка, не равные нулю.

б) B= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 3 & 9 & 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 3 & 9 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

rang(B)=2.

В качестве базисного минора выберем $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$. Тогда базисными будут 1-я и 2-я строки, а также 1й и 2й столбцы.

в) C= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 3 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 3 & 9 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

rang(B)=3.

В качестве базисного минора можно выбрать, например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, тогда базисными столбцами будут 1й, 2й и 5-й.

∮ 3. Понятие о линейной зависимости.

Определение 1. Линейной комбинацией столбцов (строк) $X_1 \ldots X_n$ называется выражение вида:

$$\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n \qquad (*)$$

где $\alpha_1 \ldots . \alpha_n \in \boldsymbol{R}$

Определение 2. Линейная комбинация столбцов (строк) $X_1 \ldots X_n$ называется тривиальной, если в выражении (*) все коэффициенты $\alpha_i = 0\,; i = 1 \ldots n$.

Определение 3. Линейная комбинация столбцов (строк) $X_1 \ldots X_n$ называется нетривиальной, если в выражении (*) хотя бы один коэффициент $\alpha_i \neq 0$.

Определение 4. Столбцы (строки) матрицы называются ***линейно зависимыми***, если можно подобрать такие числа $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, не равные нулю одновременно, что существует их линейная комбинация, равная нулевому столбцу (строке):
$\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_n X_n = 0$.
Другими словами, столбцы (строки) матрицы называются ***линейно зависимыми***, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому столбцу (строке).

Например, для столбцов: $\alpha_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_m \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} c_1 \\ \ldots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$

Определение 5. Если таких чисел не существует, т.е. равенство выполняется только, если в $\alpha_i = 0; i = \overline{1, n}$, то столбцы (строки) называются **линейно независимыми.**

Другими словами, столбцы (строки) матрицы называются ***линейно независимыми***, если только их тривиальная линейная комбинация может равняться нулевому столбцу (строке).

Определение 6. Столбцы (строки) матрицы называются **линейно зависимыми**, если хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных.

$X_n = \beta_1 X_1 + \dots + \beta_{n-1} X_{n-1}$

Легко доказать, что определения 4 и 6 эквивалентны.

Пример1. $\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; Следовательно, столбцы $\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ линейно зависимые.

Пример2.

$\alpha_1 \binom{1}{2} + \alpha_2 \binom{1}{3} = \binom{0}{0} <=> \alpha 1 = \alpha 2 = 0 =>$ столбцы линейно независимы.

Свойство 12 определителей. Если в матрице А строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

Док-во: раскладываем на сумму определителей, в которых одинаковые строки(столбцы).

Теорема (о базисном миноре). В произвольной матрице каждый столбец (строка) является линейной комбинацией базисных столбцов (строк).

Доказательство. С помощью элементарных преобразований, а именно прибавляя к какой-либо строке матрицы одну из ее базисных строк, умноженную на число, мы приводили матрицу к ступенчатому виду. В результате этих преобразований некоторые небазисные строки обнуляются. Отсюда непосредственно вытекает то, что небазисные строки являются линейной комбинацией базисных.

Транспонируем матрицу и применим уже доказанное утверждение о строках, таким образом теорема будет доказана и для столбцов.

Мы уже сформулировали свойство, что определитель матрицы, столбцы или строки которой линейно зависимы, равен нулю.

Теперь из теоремы следует обратное утверждение.

Следствие. Если A- квадратная матрица и detA = 0, то по крайней мере один из столбцов – линейная комбинация остальных столбцов. То же самое справедливо и для строк.

Доказательство. Действительно, если det A=0, то r(A)$< n,$ где n- порядок матрицы. То есть по крайней мере одна из строк и столбцов не входят в базисный минор, а следовательно является линейной комбинацией базисных.

Теорема (о ранге матрицы) Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых столбцов (строк) в этой матрице.

Доказательство. Пусть rang(A)=r>0

1) Докажем, что в A существует r линейно независимых столбцов. Действительно, рассмотрим составленную из элементов матрицы A, матрицу A_1, порядка r, образующую базисный минор. Её столбцы- часть столбцов матрицы A. Если бы столбцы A были бы линейно зависимы, то и столбцы A_1 были бы линейно зависимы, и базисный минор равнялся бы нулю. Противоречие.

2) Докажем теперь, что любые p столбцов матрицы A линейно зависимы, если p>r. Составим матрицу B из этих p столбцов. r(B)$\leq r$, так как каждый минор B является минором A, и следовательно в B нет отличного от нуля минора порядка, большего чем r. Таким образом r(B)$< p$, и хотя бы один из столбцов B не входит в базисный минор, а следовательно выражается через остальные.

Аналогично доказывается и для строк. Теорема доказана.

Следствие. Наибольшее число линейно независимых столбцов в матрице равно наибольшему числу линейно независимых строк.

Обобщим. В матрице можно выделить базисный минор (определитель не равный нулю), не единственным образом. Его образует r линейно независимых базисных строк и базисных столбцов. Ранг матрицы равен r. Остальные строки и столбцы являются линейной комбинацией базисных.

∮ 4. Решение произвольных систем линейных уравнений.

Как было сказано выше, матричный метод и метод Крамера применимы только к тем системам линейных уравнений, в которых число неизвестных равняется числу уравнений. Далее рассмотрим произвольные системы линейных уравнений.

Определение. Система m уравнений с n неизвестными в общем виде записывается следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots a_{1_j}x_j + \dots a_{1_n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{i1}x_1 + \dots a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{m_j}x_j + \dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

где $-a_{ij}$ коэффициенты, а bi – постоянные, x_j-неизвестные.

Определение. Решениями системы являются n чисел $x_1; \dots x_j; \dots x_n$, которые при подстановке в систему превращают каждое ее уравнение в тождество.

Определение. Если система имеет хотя бы одно решение, то она называется ***совместной***. Если система не имеет ни одного решения, то она называется ***несовместной***.

Определение. Совместная система называется ***определенной***, если она имеет только одно решение и ***неопределенной***, если более одного.

Определение. Для системы линейных уравнений матрица из коэффициентов при неизвестных

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ называется матрицей системы,

а матрица $\hat{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{\mathrm{mn}} & b_m \end{array}\right)$ называется расширенной матрицей системы.

Определение. Если $b_i = 0$, при i=$\overline{1;n}$ то система называется ***однородной***.

Утверждение. Однородная система всегда совместна, так как всегда имеет нулевое решение.