ЛЕКЦИЯ 3
Обратная матрица.

∮ 1 Определитель произведения квадратных матриц

Теорема. Пусть A и B— квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда det(A·B)= detA·detB.

Докажем эту теорему для матриц второго порядка.

$$\det(AB)=\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} ax & ay \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} bz & bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} ax & ay \\ cx & cy \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & ay \\ dz & dt \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bz & bt \\ cx & cy \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bz & bt \\ dz & dt \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + ad(xt - yz) + bc(zy - tx) + 0 = \Delta$$

$$\det A \cdot \det B = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} = (ad - bc)(xt - yz) = \Delta$$

Данная теорема справедлива для матриц любого порядка.

Пример. Найти определитель произведения матриц A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и B=$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

Находим определители данных матриц второго порядка

det A = -2; detB = 7

По теореме об определителе произведения матриц получаем:

det(AB) = detA·detB=(-2)(7)= -14.

Вычислим этот же определитель, находя произведение матриц:

det(AB)=$\begin{vmatrix} 9 & -13 \\ 19 & -29 \end{vmatrix}$= -9$\cdot$ $29 + 19 \cdot 13 =$ -14

Результат совпадает с полученным ранее.

∮ 2 Невырожденная матрица

Определение. Квадратная матрица A называется ***невырожденной***, если $\det A \neq 0$. В противной случае, если $\det A = 0$, она называется ***вырожденной***.

Утверждение 1 Произведение квадратных матриц, хотя бы одна из которых вырожденная, будет вырожденной.

Доказательство: $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 0$

Утверждение 2 Произведение двух невырожденных матриц будет невырожденной матрицей. $\det AB = \det A \cdot \det B \neq 0$

∮ 3 Обратная матрица

1. Определение. Матрица $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & . & . & . \\ . & . & . & . \\ A_{n1} & . & . & A_{\mathrm{nn}} \end{pmatrix}^T =$

$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & . & . & . \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & . & . & A_{\mathrm{nn}} \end{pmatrix}$, где Aij- алгебраические дополнения к a_{ij}- элементам матрицы А, называется ***присоединенной*** к матрице А (союзной).

Определение. Матрица A^{-1} называется ***обратной*** к матрице А, если выполняется условие $AA^{-1} = A^{-1}A$ =Е,

где Е-единичная матрица такого же порядка, что и А.

Матрица A^{-1} имеет такой же порядок что и А.

Теорема. Невырожденная матрица имеет обратную.

Проведем доказательство для случая матрицы порядка 3.

Составим присоединенную матрицу и найдем произведение

$$AA^{*}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} & \dots & a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13} & \dots & a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13} & \dots & a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot E.$$ (по свойствам определителей 10 , 11)

Аналогично доказывается, что $A^*A = \det A \cdot E$.

Или $A\dfrac{A^*}{\det A} = \dfrac{A^*}{\det A}A = E$, т.е существует обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом проводятся доказательства для матрицы порядка n.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{или } A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{11} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

Утверждение 3. Найденная **матрица** A^{-1} **является единственной,** удовлетворяющей условию $AA^{-1} = A^{-1}A=E$, для данной невырожденной матрицы А.

Доказательство. Действительно, если есть матрица C, такая, что AC=CA=E, то

$$\mathrm{CA}A^{-1} = \mathrm{C}(\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1}) = \mathrm{CE} = C$$

$\mathrm{CA}A^{-1} = (\mathrm{CA})A^{-1} = \mathrm{E}\mathrm{A}^{-1} = A^{-1}$, следовательно C=$A^{-1}$

Утверждение 4. Для вырожденной матрицы обратная не существует.

Данное утверждение следует из утверждения 1. Действительно,

det AA^{-1}=det A^{-1}detA=0, с другой стороны det E=1 , противоречие.

Очевидно, что матрица A^{-1} имеет такой же порядок что и А.

Критерий существования обратной матрицы. Для квадратной матрицы А существует обратная A^{-1} тогда и только тогда, когда А невырожденная.

2. **Свойства обратной матрицы:**

1) $\det(A^{-1})$ =1/detA.

Вытекает из теоремы об определителе квадратных матриц.

det (AA^{-1}) =detA detA^{-1}= detE=1 ⇒ det A^{-1} =1/detA

Отсюда следует, что A^{-1} также невырожденная. Обратной для нее является матрица A.

2) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

3) $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

4) $(A^{-1})^{-1} = A$

Пример. Найти обратную матрицу.

1) A= $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(Для матрицы второго порядка существует простое правило: элементы, стоящие на главной диагонали меняются местами, а стоящие на побочной диагонали меняют знак)

Проверка: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = E;$$ Верно.

2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix};\ \det A=\begin{vmatrix}1 & 5 & 2\\ 1 & -2 & 0\\ -1 & -7 & 0\end{vmatrix}=2(-7-2)=-18\neq 0$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=6\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-6\quad A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=3\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}5 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-14\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=2$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\quad A_{31}=\begin{vmatrix}5 & 2\\ -2 & 0\end{vmatrix}=4\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-7$$

$$A^{-1}=\frac{-1}{18}\begin{pmatrix}6 & -6 & 3\\ -14 & 2 & 2\\ 4 & 2 & -7\end{pmatrix}^{T}=-\frac{1}{18}\begin{pmatrix}6 & -14 & 4\\ -6 & 2 & 2\\ 3 & 2 & -7\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\ A=-\frac{1}{18}\begin{pmatrix}6 & -14 & 4\\ -6 & 2 & 2\\ 3 & 2 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 5 & 2\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E;$$

Проверка обязательна!

$\oint$ 4 Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы.

Пусть A- квадратная матрица

AX=B $\Rightarrow A^{-1}(\text{AX}) = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$

XA=B $\Rightarrow (\text{XA})A^{-1} = \text{BA}^{-1} \Rightarrow X = \text{BA}^{-1}$

Пример.

A=$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Решить матричные уравнения: AX=B; XA=B

det A=1; A^{-1}=$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$;

Решим уравнение AX=B; $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix}$;

Проверка: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Решим уравнение XA=B; $X \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 & 23 \\ -11 & 9 \end{pmatrix}$

Проверка: $\begin{pmatrix} -31 & 23 \\ -11 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$\oint$ 5 Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Рассмотрим систему n уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Ее можно записать в матричном виде: AX=B,

где A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$; X=$\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$; B=$\begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$

Если detA$\neq 0$, то A^{-1} существует и X= A^{-1}B.

Следствие: формулы Крамера.

Пример. Решить матричным методом систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1(12-6)-5(8-2)+2(6-3) = -18$$

$$A^{-1} = -1/18 \begin{pmatrix} 6 & -6 & 3 \\ -14 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -7 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 6 & -14 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$ Уже искали!

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 6 & -14 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -18 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

т.е. $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.