



ЛЕКЦИЯ 2

Определители. Формулы Крамера.

§1. Определители.

Определение. Квадратной матрице порядка n определенным образом ставится в соответствие число (или выражение) (**$\det A$** или $|A|$ или Δ), называемое ее **определителем** в соответствии со следующим правилом:

1. Определителем матрицы порядка 1, ($n=1$) называется единственный элемент этой матрицы. $A=(a_1)$; $\det A=a_1$

2. Определителем матрицы порядка $n>1$ называется число $\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{1k} M_{k1}$, где M_{k1} - определитель матрицы порядка $(n-1)$, полученной из A вычеркиванием 1-й строки и k -го столбца.



Заметим, что введенные нами на прошлой лекции определения определителя второго и третьего порядка удовлетворяют пункту 2 данного правила.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

§2. Миноры и алгебраические дополнения.

Определение. *Минором* $M_{i,j}$ некоторого элемента $a_{i,j}$ определителя n -ого порядка называется определитель $(n-1)$ порядка, полученный из исходного путем вычеркивания i -й строки и j -ого столбца, на пересечении который он стоит.

1. Так, для $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; $M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$



Определение. *Алгебраическим дополнением* $A_{i,j}$ элемента $a_{i,j}$ определителя называется минор, взятый со знаком плюс, если сумма $i+j$ четное число, и со знаком минус, если эта сумма нечетная, то есть $A_{i,j}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Например, $A_{11} = M_{11}$, $A_{12} = -M_{12}$.

Алгебраические дополнения и миноры различаются только знаком. Следующая таблица дает наглядное представление о знаках алгебраических дополнений для определителя 3-го порядка

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$



Используя понятие алгебраического дополнения, определение определителя можно записать так:

Определение. *Определителем* матрицы порядка $n > 1$ называется число ***detA*** $= \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k}$, то есть определитель равен сумме произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения.

Определитель третьего порядка в соответствии с данным определением вычисляется следующим образом:



$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$

$$= (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$
$$a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

Мы видим, что получается такой же результат, как и в соответствии с определением, введенным на прошлой лекции.

Тоже самое можно сказать и про определитель второго порядка.



Пример: Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 69 - 3 = 62.$$

Вычисление определителей порядка 4 и более требует трудоемких вычислений, поэтому прежде чем вычислять определители более высоких порядков сформулируем основные свойства определителей, присущие определителям всех порядков. Некоторые докажем, а некоторые поясним на примерах определителей 2-го и 3-го порядка.

Сначала сформулируем очень важную теорему.



Теорема. Для каждой квадратной матрицы порядка n , ($n > 1$), справедлива следующая формула: $\det A = \sum_{k=1}^n a_{k1} A_{k1}$; то есть определитель равен сумме произведений элементов первого столбца на их алгебраические дополнения.

§ 3. Свойства определителя

1Св Величина определителя не меняется, если у него заменить строки соответствующими столбцами (*равноправность строк и столбцов*).

$$\det A = \det A^T.$$

Проверим данное свойство на определителе второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Докажем это свойство по индукции. Для матриц 1го порядка оно, очевидно, выполняется. Предположив, что оно верно для матриц $(n-1)$ порядка, докажем, что оно будет верно для матриц n -го порядка.



Пусть матрица A_j^1 — матрица, которая получается из A вычеркиванием 1-й строки и j -го столбца, а B_1^j — матрица, получаемая из A^T вычеркиванием j -й строки и 1-го столбца. Легко заметить, что $B_1^j = A_j^{1T}$. Тогда из предположения индукции следует, что $\det B_1^j = \det A_j^1$, то есть минор элемента a_{1j} матрицы A равен минору элемента b_{j1} матрицы A^T . Кроме того, $a_{1j} = b_{j1}$. Тогда разложение $\det A$ по первой строке совпадает с разложением $\det A^T$ по первому столбцу.

Из данного свойства следует равноправность строк и столбцов, то есть если для определителя какое-то утверждение справедливо для строк, то оно справедливо и для столбцов.



2Св Величина определителя меняет знак, если у него поменять местами две строки (столбца)

Например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{22}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$$



3Св Величина определителя умножается на число k , если элементы какого-либо его столбца или строки умножить на k . Или, другими словами- общий множитель, присутствующий в строке или столбце, можно выносить за знак определителя

Например:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ka_{11} \cdot a_{22} - ka_{12} \cdot a_{21} = k(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 3 & -6 & 1 \\ 7 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \\ 7 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$



4Св Величина определителя равна нулю, если элементы какого-либо его столбца или строки равны нулю.

Например: $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = 0 \cdot b - 0 \cdot a = 0$

Докажем для определителя n -го порядка. Если 1-я строка состоит из нулевых элементов, то $\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{1k} M_{1k} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} 0 M_{1k} = 0$.

Если другая строка состоит из нулевых элементов, то меняем ее местами с первой строкой, определитель при этом поменяет знак по свойству 2, то есть $\det A = -0 = 0$.

Если столбец матрицы состоит из нулевых элементов, то транспонируем матрицу. Согласно свойству 1 определитель не изменится, а определитель транспонированной матрицы равен нулю.

$$\det A = \det A^T = 0.$$



5Св Величина определителя равна нулю, если элементы двух строк или столбцов соответственно равны.

Например:

$$\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$$

Доказательство для общего случая:

При перестановке 2-х строк (столбцов) определитель меняет знак. Но так как эти строки (столбцы) одинаковые, то определитель не изменится, т.е.

$-\det A = \det A$, следовательно определитель равен нулю $\det A = 0$.



6Св Если все элементы некоторого столбца (строки) пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.

Доказательство: Данное свойство является следствием свойств 3 и 5.

Рассмотрим на примере определителя 3 порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0$$

Для определителя произвольного порядка доказывается аналогично.



7Св. Если элементы какого либо столбца (строки) определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.

Например:

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}$$

Докажем для строк:

- 1) Пусть первая строка- это сумма : $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n$, тогда $\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} (a_k + b_k) M_{k1} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k M_{k1} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} b_k M_{k1} = \det A_1 + \det A_2$.



- 2) Пусть i -я строка – это сумма двух слагаемых, $i \neq 1$; Обозначим B матрицу, которая получится из матрицы A , если у нее поменять местами 1-ю и i -ю строки, тогда определители поменяют знак. $\det B = \det B_1 + \det B_2 \Rightarrow -\det A = -\det A_1 - \det A_2 \Rightarrow$
 $\det A = \det A_1 + \det A_2$

По свойству 1 и для столбцов это будет справедливо.

8Св. (Элементарные преобразования определителя)

Определитель не изменится, если к элементам одного столбца (строки) прибавить соответствующие элементы параллельного столбца (строки), умноженные на любое число.

Например, докажем что



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + ka_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + ka_{32} \end{vmatrix}$$

Действительно

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + ka_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + ka_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} = \Delta + 0 = \Delta$$

Аналогично доказывается для определителя n-го порядка.



9Св. Если одна из строк (столбцов) матрицы является линейной комбинацией других строк, то определитель равен нулю.

Доказательство:

Данное свойство является следствием свойств 3;5 и 7.

Рассмотрим на примере определителя 3 порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \lambda a_{11} + k a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \lambda a_{21} + k a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & \lambda a_{31} + k a_{32} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = 0.$$



10Св (Разложение определителя по элементам некоторой строки (столбца)). Определитель равен сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения.

$$\text{Det } A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^m a_{ij} A_{ij}$$

По i -й строке по j -му столбцу

При разложении по i -й строке каждый из элементов строки умножается на определитель $(n-1)$ -го порядка, составленный из элементов матрицы A , оставшихся после вычеркивания i -й строки и j -го столбца. При этом каждое слагаемое умножается на $(-1)^{i+j}$.

Таким образом, вычисление определителя n -го порядка квадратной матрицы сводится к вычислению n определителей $(n-1)$ порядка.



§ 4. Приемы для Вычисления определителя n-ого порядка

Пример. Вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Обычно используют тот ряд, где больше всего нулей.

По 2-му столбцу:



$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} + 0 + 3(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ 0 = -2(0+20+6+60-0-2) - 3(0+45+4-40-0+3) = -168-36 = -204$$

По последней строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 5(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} + 0 + (-1)(-1)^{4+3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 = -5(8+27+0-24-0+24) + 0 + (-12-12+0+4-9) = -175-19 = -204$$



Используя **свойство 8** определителя, мы можем получать строку или столбец, содержащие все нули кроме одного, тогда определитель будет равен произведению этого, не равного нулю элемента на его алгебраическое дополнение. Таким образом, определитель n -ого порядка сводится к вычислению одного определителя $n-1$ порядка, и.т.д.

Можно вычислять определители любого порядка.

Пример. Вычислить определитель пятого порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

Из 1го столбца вычтем 3й столбец, умноженный на 2;

Из 4го столбца вычтем 3й столбец, умноженный на 3;

Из 5го столбца вычтем 3-й столбец.



$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & 3 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = (\text{обнуляем элементы в}$$

1-й строке с помощью 4-го столбца:)

1-й + 4-й $\times$ 5; 2-й - 4-й; 3-й + 4-й $\times$ 4

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 26 & -1 & 19 & 5 \\ -9 & 2 & -12 & -1 \\ 13 & 0 & 14 & 2 \end{vmatrix} = (\text{теперь разложим определитель по 1-й строке}) = \\ &= 1(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 26 & -1 & 19 \\ -9 & 2 & -12 \\ 13 & 0 & 14 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 26 & -1 & 19 \\ 43 & 0 & 26 \\ 13 & 0 & 14 \end{vmatrix} = (\text{к 2-й строке + удвоенную первую}) = \\ &= -(-1)(-1)^3 \begin{vmatrix} 43 & 26 \\ 13 & 14 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 43 & 13 \\ 13 & 7 \end{vmatrix} = -2((43 \cdot 7 - 13 \cdot 13)) = -2(301 - 169) = -264. \end{aligned}$$



Утверждение. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов ее главной диагонали.

Доказательство: Определитель верхне-треугольной матрицы раскладываем по 1 столбцу, а нижне-треугольной - по первой строке.

Рассмотрим на примере определителя 3 порядка.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & g \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} d & e \\ 0 & g \end{vmatrix} = adg$$

Следствие. Определитель единичной матрицы $\det E = 1$.

11Св Сумма произведений элементов любой строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения другого (параллельного) ряда равна нулю.



§ 5. Определитель произведения квадратных матриц

Теорема. Пусть A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Докажем эту теорему для матриц второго порядка.

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax & ay \\ cx + dz & cy + dt \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} bz & bt \\ cx + dz & cy + dt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax & ay \\ cx & cy \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & ay \\ dz & dt \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bz & bt \\ cx & cy \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bz & bt \\ dz & dt \end{vmatrix} = \\ &= 0 + ad(xt - yz) + bc(zx - ty) + 0 = \Delta \end{aligned}$$

$$\det A \det B = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} = (ad - bc)(xt - yz) = \Delta$$

Данная теорема справедлива для матриц любого порядка.



Пример. Найти определитель произведения матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

Находим определители данных матриц второго порядка

$$\det A = -2; \det B = 7$$

По теореме об определителе произведения матриц получаем:

$$\det(AB) = \det A \det B = (-2)(7) = -14.$$

Вычислим этот же определитель, находя произведение матриц:

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 9 & -13 \\ 19 & -29 \end{vmatrix} = -9 \cdot 29 + 19 \cdot 13 = -14$$

Результат совпадает с полученным ранее.



§ 6. Решение систем линейных уравнений. Формулы Крамера.

Рассмотрим систему 2-х линейных уравнений с 2-мя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Решением такой системы называется каждая пара значений x и y , подстановка которых в систему дает тождество.

Чтобы решить, умножим 1-е уравнение на b_2 , второе на $-b_1$ и сложим.

$x(a_1b_2 - a_2b_1) = c_1b_2 - c_2b_1$. Если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то будем иметь

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Аналогично находим $y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, умножив 1-е уравнение на a_2 , а второе на $-a_1$ и сложив.



Таким образом, если $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то система имеет единственное решение (непараллельные прямые имеют единственную точку пересечения).

Рассмотрим определитель матрицы, составленной из коэффициентов системы: $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$; он называется *определителем системы*.

$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, получается при замене 1-го столбца Δ свободными членами.

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, получается при замене 2-го столбца Δ свободными членами.

Формулы приобретают следующий вид: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$. Это формулы Крамера, названы в честь Швейцарского математика Габриэля Крамера, живший в XVIII веке, который вывел эти формулы.



Пример. Решить систему. $\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -13; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 13,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -26 \quad x = \frac{13}{-13} = -1 \quad y = \frac{-26}{-13} = 2$$

Утверждение . Если определитель системы отличен от нуля , то существует , притом единственное, решение системы.

Рассмотрим теперь случай когда $a_1b_2 - a_2b_1=0$, т.е $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

1) Если еще и $\frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2}$, то мы имеем одно уравнение с двумя неизвестными- оно допускает бесчисленное множество решений(одна прямая).



2) Если же $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, (параллельные прямые, не пересекаются), то уравнения противоречат друг другу и система не имеет ни одного решения.

Аналогично выводятся формулы для решения системы из 3-х уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$



$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c \end{vmatrix} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c \end{vmatrix} \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

Аналогичные формулы справедливы и для систем из n уравнений с n неизвестными. Эти формулы называются формулами Крамера и названы в честь Швейцарского математика Габриэля Крамера, жившего в XVIII веке, который и вывел данные формулы.

Пример. Решить систему
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$



$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0; \quad \Delta_x =$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 18$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1 \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 0 \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 2$$