

ЛЕКЦИЯ № 13

Евклидово пространство.

Определение евклидова пространства. Скалярное произведение векторов. Нормированные пространства. Угол между векторами.

Неравенство Коши-Буняковского.

Определение. Линейное пространство E называется ***евклидовым пространством***, если в нем задано скалярное произведение.

Определение. Скалярным произведением векторов $\bar{x}, \bar{y} \in E$ называется числовая функция $(\bar{x}, \bar{y})$, если выполнены следующие условия (аксиомы):

$$\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$a) \quad (\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$$

$$b) \quad (\lambda \bar{x}, \bar{y}) = \lambda (\bar{x}, \bar{y})$$

$$c) \quad (\bar{x} + \bar{z}, \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{z}, \bar{y});$$

$$d) \quad (\bar{x}, \bar{x}) \geq 0, \text{ причем } (\bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{0};$$

Другими словами, скалярное произведение – симметричная билинейная форма. Причем, соответствующая ей квадратичная форма- положительно определенная.

В произвольном линейном пространстве можно ввести скалярное произведение, причем различными способами.

Примеры:

$$1. \text{ В } V_3 : (\bar{x}, \bar{y}) = |\bar{x}| |\bar{y}| \cos (\widehat{\bar{x}, \bar{y}})$$

$$2. \text{ В } R^n : (\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

$$3. \text{ В } C[0; 1] \text{ (линейное пространство функций, непрерывных на } [0; 1]):$$

$$(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

Можно легко убедиться, что определенные таким образом скалярные произведения удовлетворяют определению.

1. Проверим для примера 3. В $C[0; 1]$ (линейное пространство функций, непрерывных на $[0; 1]$): $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

$$a) (f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 g(x)f(x)dx = (g, f)$$

$$b) (\lambda f, g) = \int_0^1 \lambda f(x)g(x)dx = \lambda \int_0^1 f(x)g(x)dx = \lambda(f, g)$$

$$c) (f_1 + f_2, g) = \int_0^1 (f_1(x) + f_2(x))g(x)dx = \int_0^1 f_1(x)g(x)dx + \int_0^1 f_2(x)g(x)dx = (f_1, g) + (f_2, g)$$

$$d) (f, f) = \int_0^1 f^2(x)dx \geq 0, \text{ причем } (\bar{f}, \bar{f}) = \int_0^1 f^2(x)dx = 0 \Leftrightarrow \bar{f} \equiv \bar{0};$$

по свойству определенного интеграла.

Свойства скалярного произведения:

- 1) $(\vec{x}, \lambda \vec{y}) = \lambda (\vec{x}, \vec{y})$
- 2) $(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z})$
- 3) $(\vec{x}, \vec{0}) = 0$
- 4) $\sum_{k=1}^m (a_k \vec{x}_k, \vec{y}) = \sum_{k=1}^m a_k (\vec{x}_k, \vec{y}); a_k \in R$
- 5) Если для любого $\vec{z}$, $(\vec{x}, \vec{z}) = (\vec{y}, \vec{z})$, то $\vec{x} = \vec{y}$

Доказательство: 1) $(\vec{x}, \lambda \vec{y}) = (\lambda \vec{y}, \vec{x}) = \lambda (\vec{y}, \vec{x}) = \lambda (\vec{x}, \vec{y})$

$$2) (\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{y} + \vec{z}, \vec{x}) = (\vec{y}, \vec{x}) + (\vec{z}, \vec{x}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z})$$

$$3) (\vec{x}, \vec{0}) = (\vec{x}, 0\vec{0}) = 0(\vec{x}, \vec{0}) = 0$$

5) $(\vec{x}, \vec{z}) = (\vec{y}, \vec{z})$ запишем в виде $(\vec{x}, \vec{z}) - (\vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x} - \vec{y}, \vec{z}) = 0$. Данное равенство верно для любого $\vec{z}$. Возьмем $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$. $(\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}) = 0$

По аксиоме d) это возможно только если $\vec{x} - \vec{y} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{y}$

Теорема (неравенство Коши-Буняковского).

Для любых векторов $\vec{x}, \vec{y}$ евклидова пространства справедливо **неравенство Коши-Буняковского** $(\bar{x}, \bar{y})^2 \leq (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y})$



1. При $\bar{x} = \bar{0}$ обе части неравенства равны 0 $\Rightarrow$ неравенство выполняется

2. Пусть $\bar{x} \neq \bar{0}$ $(\lambda\bar{x} - \bar{y}, \lambda\bar{x} - \bar{y}) \geq 0 \forall \lambda$ в силу аксиомы d).

$$(\lambda\bar{x}, \lambda\bar{x} - \bar{y}) - (\bar{y}, \lambda\bar{x} - \bar{y}) = \lambda^2(\bar{x}, \bar{x}) - \lambda(\bar{x}, \bar{y}) - \lambda(\bar{y}, \bar{x}) + (\bar{y}, \bar{y}) = \lambda^2(\bar{x}, \bar{x}) - 2\lambda(\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{y}, \bar{y}) \geq 0$$

Это квадратный трехчлен относительно λ .

$(\bar{x}, \bar{x}) > 0 \Rightarrow$ трехчлен ≥ 0 , если $D \leq 0$

$$D = 4(\bar{x}, \bar{y})^2 - 4(\bar{x}, \bar{x})(\bar{y}, \bar{y}) \leq 0 \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y})^2 \leq (\vec{x}, \vec{x}) \cdot (\vec{y}, \vec{y}); \blacktriangleright$$

Примеры неравенства Коши - Буняковского:

В линейном пространстве R^n : $(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$ - неравенство Коши.

В пространстве функций, непрерывных на отрезке $C[0;1]$:

$(\int_0^1 f(x)g(x)dx)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2dx \cdot \int_0^1 g(x)^2dx$ -неравенство Буняковского.

Определение. Функцию, заданную на линейном пространстве L , которая каждому вектору $\vec{x} \in L$ ставит в соответствие действительное число $\|\vec{x}\|$, называют **нормой**, если она удовлетворяет следующим аксиомам нормы:

а) $\|\vec{x}\| \geq 0$, причем $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$;

б) $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$; $\lambda \in R$.

в) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (неравенство треугольника)

Определение. Линейное пространство, в котором задана норма вектора, называется **нормированным**.

Теорема. Всякое скалярное произведение в евклидовом пространстве определяет норму вектора согласно формуле: $\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$. Эта норма называется *евклидовой*.

◀ Согласно аксиоме скалярного произведения для $(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$; $\forall \bar{x} \Rightarrow$ функция $\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})}$ определена $\forall \bar{x} \in E$ - евклидову пространству. Проверим выполнение всех аксиом нормы.

а) следует из аксиомы d) скалярного произведения;

б) следует из аксиомы b) скалярного произведения;

$$\|\lambda \bar{x}\| = \sqrt{(\lambda \bar{x}, \lambda \bar{x})} = \sqrt{\lambda^2 (\bar{x}, \bar{x})} = |\lambda| \|\bar{x}\|$$

в) запишем неравенство Коши-Буняковского $(\bar{x}, \bar{y})^2 \leq (\bar{x}, \bar{x}) \cdot (\bar{y}, \bar{y})$ в виде:

$$(\bar{x}, \bar{y}) \leq \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} \sqrt{(\bar{y}, \bar{y})}, \text{ т.е. } (\bar{x}, \bar{y}) \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|;$$

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = (\bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{x}) + 2(\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{y}, \bar{y}) \leq$$

$$(\bar{x}, \bar{x}) + 2\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| + (\bar{y}, \bar{y}) = (\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|)^2 \Rightarrow$$

$$\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\| \blacktriangleright$$

Существуют также другие способы определения нормы, например:

$$\|\bar{x}\|_{\infty} = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$$

Легко проверить, что $\|\bar{x}\|_{\infty}$ удовлетворяет аксиомам нормы.

Определение: Углом между ненулевыми векторами в евклидовом пространстве называют значение $\varphi \in [0, \pi]$, определяемое равенством

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

Корректность формулы следует из *неравенства Коши-Буняковского*:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E \quad |(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

Если один из векторов нулевой, то угол не определен.

Определение: Два ненулевых вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Обозначается $\vec{x} \perp \vec{y}$.

Пример 1. Доказать, что в евклидовом пространстве $C[0;1]$ векторы

$f(x) \equiv 2$ и $g(x) = 2x - 1$ ортогональны.

$$(f, g) = \int_0^1 f g dx = \int_0^1 2(2x - 1) dx = 2(x^2 - x)|_0^1 = 0 \Rightarrow f \perp g.$$

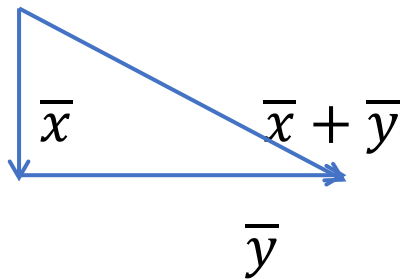
Утверждение. Нулевой вектор ортогонален любому вектору.

$$(\bar{x}, \bar{0}) = (\bar{x}, 0 \cdot \bar{0}) = 0(\bar{x}, \bar{0}) = 0.$$

Теорема. Если $\bar{x}$ и $\bar{y} \in E$ ортогональны, то $\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2$

$$\begin{aligned} \blacktriangleleft \|\bar{x} + \bar{y}\|^2 &= (\bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{x}) + 2(\bar{x}, \bar{y}) + (\bar{y}, \bar{y}) = \\ &= \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2; \text{ так как } (\bar{x}, \bar{y}) = 0 \blacktriangleright \end{aligned}$$

Таким образом, теорема Пифагора распространяется на произвольное евклидово пространство.



Определение. Вектор называется *нормированным*, если $\|\bar{x}\|=1$

Определение. Система векторов $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ называется *ортogonalной*, если $(\bar{x}_i, \bar{x}_j)=0$, если $i \neq j$; $i, j=\overline{1, n}$

Определение. Система векторов $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$ называется ортонормированной, если $(\bar{x}_i, \bar{x}_j)=\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}, i, j=\overline{1, n}$

(δ_{ij} – символ Кронекера).

Ортонормированная система ортогональна и $\|\bar{x}_i\|=1$ для $\forall i$.

Утверждение. Если векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ ортогональны, то $\bar{x}$ и $\lambda\bar{y}$ также ортогональны.

Доказательство :

$(\bar{x}, \lambda\bar{y}) = \lambda(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, так как $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

Теорема. Любая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

◀ Рассмотрим произвольную ортогональную систему ненулевых векторов $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$. Предположим, что для некоторых действительных коэффициентов $\alpha_1 \dots \alpha_n$ выполняется $\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n = \bar{0}$. Умножим обе части равенства скалярно на $\bar{e}_i$.

$$(\alpha_1 \bar{e}_1 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n, \bar{e}_i) = (\bar{0}, \bar{e}_i) = 0, \Rightarrow$$

$$\alpha_1 (\bar{e}_1, \bar{e}_i) + \dots + \alpha_i (\bar{e}_i, \bar{e}_i) + \dots + \alpha_n (\bar{e}_n, \bar{e}_i) = 0,$$

Векторы ортогональны $\Rightarrow$ все слагаемые кроме одного обращаются в ноль
 $\Rightarrow \alpha_i (\bar{e}_i, \bar{e}_i) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$, так как $(\bar{e}_i, \bar{e}_i) \neq 0$ по аксиоме 4.

Таким образом доказывается, что $\alpha_i = 0$ для $\forall i \Rightarrow \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ л.н.з. ►

Теорема. Любая ортогональная система из n векторов в евклидовом пространстве размерности n образует базис.

◀ Ортогональная система из n векторов в евклидовом пространстве линейно-независима, а линейно-независимая система из n векторов в линейном пространстве размерности n образует базис. ▶

Определение. Базис $\{\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n\}$ называется *ортонормированным*, если векторы единичной длины и попарно ортогональны, то есть:

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Пусть $\{\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n\}$ - ортогональный базис.

Тогда $\left\{ \frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|} \dots \frac{\vec{e}_n}{\|\vec{e}_n\|} \right\}$ будет ортонормированным базисом.

Ортогональный базис легко превратить в ортонормированный, если каждый вектор разделить на его норму.

Координатная форма скалярного произведения в ортонормированном базисе: $(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

Норма вектора $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

Действительно, $(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 \dots + x_n\vec{e}_n, y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \dots + y_n\vec{e}_n) = x_1y_1(\vec{e}_1\vec{e}_1) + x_1y_2(\vec{e}_1\vec{e}_2) + \dots x_ny_n(\vec{e}_n\vec{e}_n) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$, так как

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Задача . В евклидовом пространстве R^4 найти угол между векторами, заданными в каноническом базисе: $\vec{x} = (-1, 1, 0, 2)$; $\vec{y} = (2, -1, 1, 0)$

Решение.

Канонический базис ортонормированный $\Rightarrow$

$$\cos\varphi = \frac{-2-1}{\sqrt{1+1+4}\sqrt{4+1+1}} = -0.5$$

ЛЕКЦИЯ № 14

Евклидовы пространства.

Матрица Грама. Решение задач типового расчета.

Определение. Матрица из попарных скалярных произведений векторов в фиксированном базисе B называется *матрицей Грама скалярного произведения в этом базисе*:

$$G_{\vec{b}} = \begin{pmatrix} (\vec{e}_1, \vec{e}_1) & (\vec{e}_1, \vec{e}_2) & \dots & (\vec{e}_1, \vec{e}_n) \\ (\vec{e}_2, \vec{e}_1) & (\vec{e}_2, \vec{e}_2) & \dots & (\vec{e}_2, \vec{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\vec{e}_n, \vec{e}_1) & (\vec{e}_n, \vec{e}_2) & \dots & (\vec{e}_n, \vec{e}_n) \end{pmatrix}$$

Пусть в евклидовом пространстве в некотором базисе заданы два вектора

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix};$$

$$\text{тогда } (\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} x_i y_j = (x_1 \dots x_n) \cdot G \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = X^T \cdot G \cdot Y;$$

Критерий матрицы Грама скалярного произведения.

Теорема. Матрица G является матрицей Грама некоторого скалярного произведения в евклидовом пространстве тогда и только тогда, когда она

- 1) симметричная;
- 2) положительно определенная, т.е. все ее главные миноры положительные.

◀ Необходимость: $G = \{g_{ij}\}$ - матрица скалярного произведения $\Rightarrow$
 $(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = (\bar{e}_j, \bar{e}_i) = g_{ij} \Rightarrow$ матрица Грама симметричная;
 $(\bar{x}, \bar{x}) = X^T G X > 0$, при $\bar{x} \neq \bar{0}$ по аксиоме 4 скалярного произведения; $\Rightarrow$
 G задает положительно определенную квадратичную форму,
 следовательно по критерию Сильвестра все ее главные миноры
 положительные;

Достаточность: Если G симметричная и положительно определенная, то
 она задает некий закон $(\bar{x}, \bar{y}) = X^T G Y$, удовлетворяющий свойствам
 скалярного произведения $\Rightarrow G$ - матрица Грама.

Скалярное произведение векторов не зависит от базиса пространства, но
 матрица Грама меняется при замене базиса. ►

Пример 1. Могут ли быть матрицами Грама следующие матрицы:

$$1.1. \Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 1.2. \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1.3. \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad 1.4. \Gamma_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1.1. $\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ - не является матрицей Грама, так как матрица не симметрична.

1.2. $\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ - не является матрицей Грама, так как определитель матрицы < 0 .

1.3. $\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ - является матрицей Грама, так как выполняются все условия.

1.4. $\Gamma_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ - не является матрицей Грама, $\Delta < 0$.

Теорема. При замене базиса матрица Грама меняется по формуле

$G_2 = P^T G_1 P$; где G_1 и G_2 – матрицы Грама в базисах B_1 и B_2 соответственно, а P - матрица перехода от базиса B_1 к базису B_2 .

◀ Пусть X_{B_1} и Y_{B_1} – столбцы координат векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в базисе B_1 ; а X_{B_2} и Y_{B_2} - в базисе B_2 ;

$$(\bar{x}, \bar{y}) = X_{B_1}^T G_1 Y_{B_1} = (P X_{B_2})^T G_1 (P Y_{B_2}) = X_{B_2}^T (P^T G_1 P) Y_{B_2} = X_{B_2}^T G_2 Y_{B_2} \Rightarrow$$

$$G_2 = P^T G_1 P \blacktriangleright$$

Матрица Грама в ортонормированном базисе является единичной матрицей. Для скалярного произведения в трёхмерном пространстве матрица Грама в ортонормированном базисе:

$$G_{\text{ортонормир.базис}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

Задача 1

Базис задан своими координатами в ортонормированном базисе

$\{i, j, k\}$, $\bar{e}_1 = (1, 1, 1)$; $\bar{e}_2 = (2, 0, 1)$; $\bar{e}_3 = (1, 1, 0)$. Найти матрицу Грама в этом базисе.

Решение.

1 способ. $(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = 3$; $(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = 5$; $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 3$; $(\vec{e}_1, \vec{e}_3) = 2$;

$(\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 2$; $(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = 2$;

$$G_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2 способ.

$$G_2 = P^T G_1 P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача 2. Дана матрица Грама скалярного произведения $G = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Найти:

- длины базисных векторов $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$;
- угол между базисными векторами $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$;
- длины заданных векторов $\vec{x} = (1; 3)$ и $\vec{y} = (-2; 1)$;
- угол между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$;

Решение. $G = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; Длины базисных векторов: $|\vec{e}_1| = \sqrt{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \sqrt{2}$,

$$|\vec{e}_2| = \sqrt{(\vec{e}_2, \vec{e}_2)} = \sqrt{5},$$

угол между базисными векторами $\widehat{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)} = \arccos \frac{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{|\vec{e}_1||\vec{e}_2|} = \arccos \frac{-2}{\sqrt{10}} = \pi - \arccos \frac{2}{\sqrt{10}}.$

Вычислим длины данных векторов и угол между ними. $(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 \ x_2)G \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$(\vec{x}, \vec{x}) = (1 \ 3) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 35, \Rightarrow |\vec{x}| = \sqrt{35}$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (1 \ 3) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 21,$$

$$(\vec{y}, \vec{y}) = (-2 \ 1) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 17. \Rightarrow |\vec{y}| = \sqrt{17}$$

$$\widehat{(\vec{x}, \vec{y})} = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|} = \arccos \frac{21}{\sqrt{35}\sqrt{17}}$$

Задача 3. Дана матрица $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ квадратичной формы $\varphi(\vec{x})$ в базисе

$$S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\};$$

- а) Показать, что матрица G является матрицей Грама.
- б) Найти длины базисных векторов и углы между ними.
- с) Найти длины векторов $\vec{x} = (1, 2, 3)$ и $\vec{y} = (2, -1, 2)$ и угол между ними.
- д) Найти матрицу Грама квадратичной формы $\varphi(\vec{x})$ в базисе $S_1 = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$,

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1 ;$$

$$\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 ;$$

$$\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 .$$

Решение: $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

а)- матрица симметрична относительно главной диагонали, то есть равны элементы

$$a_{ij} = a_{ji};$$

- все главные миноры строго положительны,

$$\Delta_1 = 1 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 > 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

Все условия критерия матрицы Грама выполнены, значит данная матрица G является матрицей Грама.

б) длины базисных векторов и углы между ними.

С помощью матрицы Грама

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{e}_1| = \sqrt{(\vec{e}_1, \vec{e}_1)} = \sqrt{1} = 1; |\vec{e}_2| = \sqrt{(\vec{e}_2, \vec{e}_2)} = \sqrt{4} = 2; |\vec{e}_3| = \sqrt{(\vec{e}_3, \vec{e}_3)} = \sqrt{5}.$$

$$(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_2}) = \arccos \frac{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}{|\vec{e}_1||\vec{e}_2|} = \arccos \frac{-1}{2} = \frac{2}{3}\pi$$

$$(\widehat{\vec{e}_1, \vec{e}_3}) = \arccos \frac{(\vec{e}_1, \vec{e}_3)}{|\vec{e}_1||\vec{e}_3|} = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$(\widehat{\vec{e}_2, \vec{e}_3}) = \arccos \frac{(\vec{e}_2, \vec{e}_3)}{|\vec{e}_2||\vec{e}_3|} = \arccos \frac{-4}{2\sqrt{5}} = \pi - \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$$

с) длины векторов $\vec{x} = (1, 2, 3)$ и $\vec{y} = (2, -1, 2)$ и угол между ними.

Найдем попарные скалярные произведения данных векторов с помощью матрицы Грама:

$$(\vec{x}, \vec{x}) = (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 \ -5 \ 8) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 16$$

$$(\vec{y}, \vec{y}) = (2 \ -1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (5 \ -14 \ 16) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 56$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (2 \ -5 \ 8) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 25$$

Тогда длины данных векторов:

$$|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{16} = 4; \quad |\vec{y}| = \sqrt{(\vec{y}, \vec{y})} = \sqrt{56},$$

угол между данными векторами

$$(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = \arccos \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}| |\vec{y}|} = \arccos \frac{25}{4 \cdot \sqrt{56}}$$

d) найдём матрицу Грама квадратичной формы $\varphi(\vec{x})$ в базисе

$S_1 = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ с помощью матрицы перехода:

$$G_{S_1} = P^T G P; P_{S \rightarrow S_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} G_{S_1} = P^T G P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & 7 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & 6 & 14 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Убедимся, что полученная матрица является матрицей Грама:

- матрица симметрична относительно главной диагонали, то есть равны элементы

$$a_{ij} = a_{ji};$$

- все главные миноры строго положительны,

в полученной матрице это

$$\Delta_1 = 1 > 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 > 0; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ -1 & 6 & 14 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

Все условия критерия матрицы Грама выполнены, значит полученная матрица G_{S_1} является матрицей Грама.

Задача 4. В пространстве $P_2[t]$ многочленов степени не выше 2-х скалярное произведение задано формулой $(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$. Составить матрицу Грама скалярного произведения в каноническом базисе пространства $\{1, t, t^2\}$.

Решение.

$$G = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix}$$

Найдём все попарные произведения базисных элементов $e_1 = 1, e_2 = t, e_3 = t^2$:

$$(e_1, e_1) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt = \int_{-1}^1 1dt = t \Big|_{-1}^1 = 2 \quad (e_1, e_2) = (e_2, e_1) = \int_{-1}^1 1 \cdot t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0$$

$$(e_1, e_3) = (e_3, e_1) = \int_{-1}^1 1 \cdot t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3} \quad (e_2, e_2) = \int_{-1}^1 t \cdot t dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

$$(e_2, e_3) = (e_3, e_2) = \int_{-1}^1 t \cdot t^2 dt = \frac{t^4}{4} \Big|_{-1}^1 = 0 \quad (e_3, e_3) = \int_{-1}^1 t^2 \cdot t^2 dt = \frac{t^5}{5} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{5}$$

Матрица Грама будет иметь вид:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Задача 5. Найти угол между элементами $f(t) = 3t + 2$, $g(t) = t + 3$ евклидова пространства всех многочленов $P_1[t]$ со скалярным произведением $(f, g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$

Решение.

Чтобы найти длины элементов f и g , найдем скалярные квадраты

$$(f, f) = \int_{-1}^1 (3t + 2)(3t + 2)dt = \frac{(3t + 2)^3}{9} \Big|_{-1}^1 = \frac{125}{9} + \frac{1}{9} = 14$$

$$|f| = \sqrt{14}$$

$$(g, g) = \int_{-1}^1 (t + 3)(t + 3)dt = \frac{(t + 3)^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}$$

$$|g| = \sqrt{\frac{56}{3}} = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{3}}$$

Нам понадобится

$$\begin{aligned}(f, g) &= \int_{-1}^1 (3t + 2)(t + 3) dt = \int_{-1}^1 (3t^2 + 11t + 6) dt = \\ &= \left(t^3 + \frac{11t^2}{2} + 6t \right) \Big|_{-1}^1 = 14\end{aligned}$$

Для нахождения угла $\angle(f, g)$, найдем $\cos \angle(f, g) = \frac{(f, g)}{|f| \cdot |g|}$

$$\cos \angle(f, g) = \frac{(f, g)}{|f| \cdot |g|} = \frac{14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{\frac{56}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Значит $\angle(f, g) = \frac{\pi}{6}$

Можно данную задачу решить через уже найденную матрицу Грама.

$$(f, f) = (2 \ 30) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2\frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 14;$$

$$(g, g) = (3 \ 10) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(6 \ \frac{2}{3} \ 2\right) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{56}{3};$$

$$(f, g) = (2 \ 3 \ 0) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(4 \ 2 \ \frac{4}{3}\right) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 14$$