ЛЕКЦИЯ 11-12

Кривые второго порядка

Лектор: Морозова Т.А.

Кривые второго порядка на плоскости: эллипс, гипербола, парабола.
Вывод уравнений кривых второго порядка исходя из их геометрических свойств.
Исследование формы эллипса, гиперболы и параболы по их каноническим уравнениям.
Приведение уравнений кривых в каноническому виду.

Определение. ***Кривой второго порядка*** называется линия, определяемая в декартовых координатах уравнением:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (1)$$

Все коэффициенты уравнения (1) - действительные числа и предполагается, что, по крайней мере, одно из чисел A, B или C не равно нулю, т.е. $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

На самом деле, существует всего три "реальных" кривых второго порядка: **эллипс** (окружность — частный случаи эллипса), **гипербола** и **парабола**.

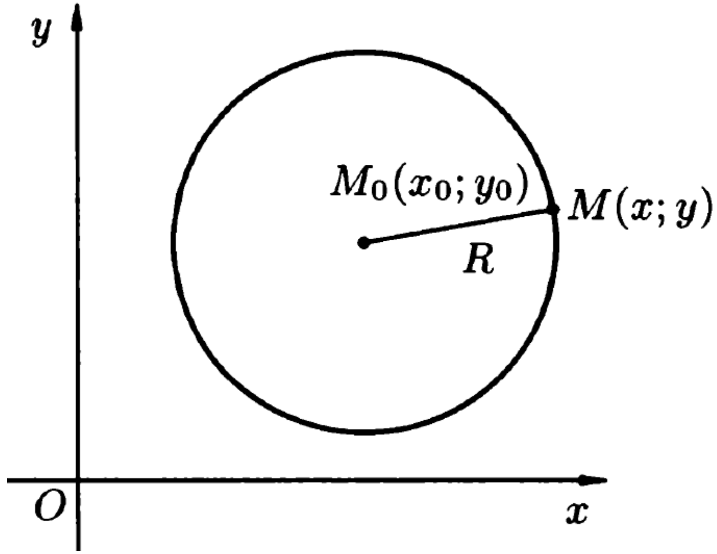
Окружность.

Определение. ***Окружностью*** называется множество всех точек плоскости, удаленных от заданной точки M_0 этой плоскости на одно и тоже расстояние $R > 0$. Точка M_0 называется ***центром***, а R – ***радиусом*** окружности.

Пусть $M_0(x_0; y_0)$ – центр, а $M(x; y)$ - произвольная точка окружности.
Тогда из условия $M_0M = R$ имеем уравнение:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R \Rightarrow$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \qquad (2)$$



Уравнению (2) удовлетворяют координаты любой точки $M(x; y)$ данной окружности и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на окружности.
Уравнение (2) называется ***каноническим уравнением окружности.***
Если $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, то получим уравнение окружности с центром в начале координат $x^2 + y^2 = R^2$.

Уравнение окружности (2) можно записать в виде:

$$x^2 + y^2 - 2\,x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0$$

Это уравнение вида (1), т.е. окружность есть кривая второго порядка.

С другой стороны, можно показать, что уравнение (1), в котором $A = C,\ B = 0$:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

с помощью дополнения до полного квадрата каждой группы членов $Ax^2 + 2Dx$ и $Cy^2 + 2Ey$, приводится к одному из трех видов:

1) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ - окружность радиуса R, с центром в точке $(x_0; y_0)$;
2) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = -R^2$ – пустое множество точек («мнимая окружность»);
3) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$ – единственная точка $(x_0; y_0)$.

Пример. Показать, что уравнение $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 5 = 0$ определяет окружность.

Решение. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 5 = 0 \Leftrightarrow$

$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 6y + 9) - 9 = 5 \Leftrightarrow$$

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 15.$$

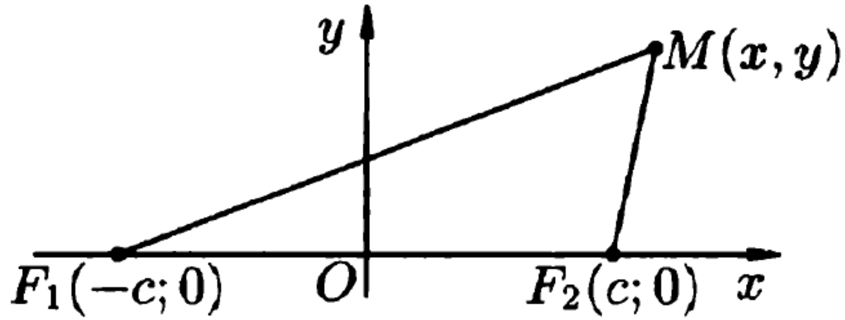
Получили уравнение окружности с центром $M(1; -3)$ и радиусом $R = \sqrt{15}$.

Эллипс.

Определение. ***Эллипсом*** называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

Пусть расстояние между фокусами F_1 и F_2 равно $2c$, а сумма расстояний до них от точек эллипса равно $2a$ $(2a > 2c)$.

Для вывода уравнения эллипса выберем систему координат Oxy так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox, а начало координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2. Тогда фокусы будут иметь следующие координаты: $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$.



Пусть $M(x;y)$ - произвольная точка эллипса, тогда по определению эллипса $MF_1 + MF_2 = 2a$, т.е.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \Rightarrow$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx$ поделим обе части на 4

$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$ возведем обе части равенства в квадрат

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Обозначив $b^2=a^2-c^2>0$, получаем: $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ или

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \qquad (3)$$

Уравнение (3) называется ***каноническим уравнением эллипса.***
Эллипс - кривая второго порядка.

Исследование формы эллипса по его уравнению.

Установим форму эллипса по его каноническому уравнению.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

1. Уравнение (3) содержит x и y только в четных степенях, поэтому если точка $(x;y)$ принадлежит эллипсу, то ему также принадлежат точки $(x;-y),(-x;y),(-x;-y)$. Отсюда следует, что координатные оси Ox и Oy являются осями симметрии эллипса, а начало координат O - его центром симметрии.

2. Найдем точки пересечения эллипса с осями координат. Положив $y=0$, находим две точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, в которых ось Ox пересекает эллипс.

Положив в уравнении (3) $x=0$, находим точки пересечения эллипса с осью Oy: $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$.

Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются ***вершинами эллипса.***

Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 и их длины $2a$ и $2b$ называются соответственно ***большой и малой осями*** эллипса.

Числа a и b - полуосями эллипса, ***a* - большая полуось, *b* - малая полуось** (т.к. $b = \sqrt{a^2 - c^2} < a$).
Положим $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Точки $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ – левый и правый фокусы эллипса; 2*c* – фокусное расстояние.

3. Из уравнения (3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ следует, что каждое слагаемое в левой части не превосходит единицы, т. е. имеют место неравенства:

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1 \text{ и } \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

или $-a \leq x \leq a$ и $-b \leq y \leq b$.
Следовательно, все точки эллипса лежат внутри прямоугольника, образованного прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$.

4. Выразив *y* из уравнения (3), получаем:

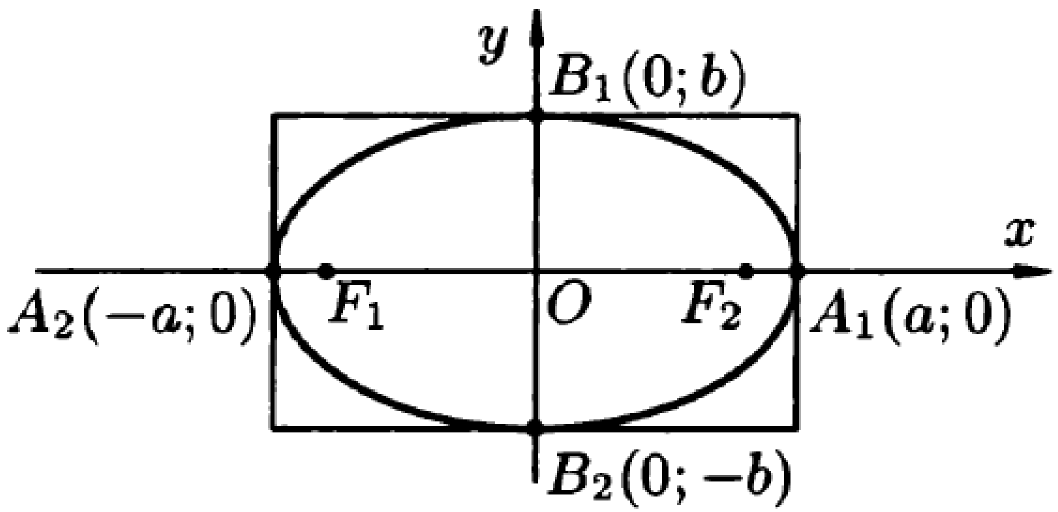
$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},\ |x| \leq a,$$

это означает, что эллипс состоит из двух симметричных половин:

верхней $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ и нижней $y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

При $x = a$, $y = 0$ и при убывании x от a до 0 y - возрастает от 0 до b.

Таким образом, эллипс имеет форму овальной замкнутой кривой.



Форма эллипса зависит от отношения $\frac{b}{a}$.

При $b = a$ эллипс превращается в окружность, уравнение эллипса (3) принимает вид: $x^2 + y^2 = a^2$.

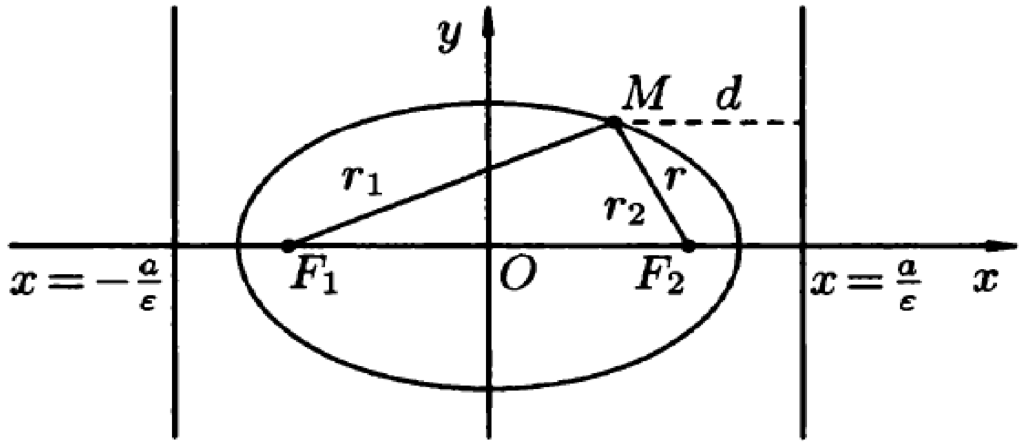
В качестве характеристики формы эллипса чаще пользуются отношением: $\boldsymbol{\varepsilon = \frac{c}{a}}$, называемым ***эксцентриситетом эллипса*** (отношение фокусного расстояния $2c$ к большей оси $2a$).

Так как $2a > 2c \Rightarrow 0 < \varepsilon < 1$.

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2$$

Тогда, чем меньше ε тем меньше его малая полуось b отличается от большой полуоси a, т.е. тем меньше эллипс вытянут вдоль фокальной оси Ox. В пределе при $\varepsilon \to 0$ получаем $a = b$ и эллипс переходит в окружность $x^2 + y^2 = a^2$ с радиусом $R = a$. При этом фокусы совпадают и находятся в начале координат $F_1 = F_2 = O$ (т.к. $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 0$).

Пусть $M(x; y)$- произвольная точка эллипса с фокусами F_1 и F_2.
Длины отрезков $F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$ называются ***фокальными радиусами точки*** M.
Из определения эллипса $r_1 + r_2 = 2a$.

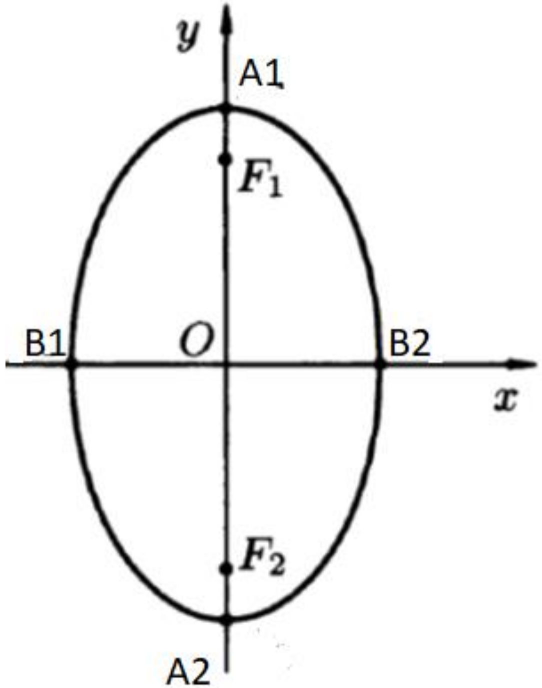


Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются директрисами эллипса.
Директрисы параллельны малой оси эллипса и отстают от нее на расстоянии равном $\dfrac{a}{\varepsilon}$.

Теорема. Если r - расстояние от произвольной точки эллипса до какого-нибудь фокуса, d - расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная ε - эксцентриситету эллипса.

Если фокусы эллипса лежат на оси Oy, то $F_1(0;c)$ и $F_2(0;-c)$, большая ось $2a$ лежит на оси Oy, а малая ось $2b$ - на оси Ox, $a > b$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $\varepsilon = \frac{c}{a}$; уравнения директрис: $y = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Уравнение: $$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad (3^*)$$

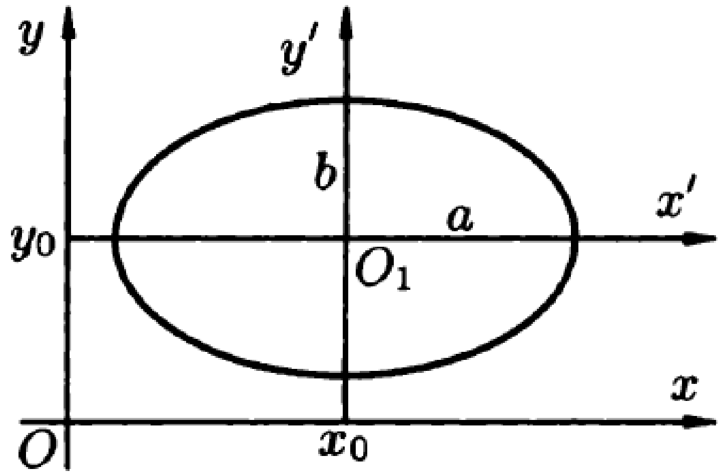


Можно вывести параметрические уравнения эллипса:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0; 2\pi] \qquad (4)$$

Если центр симметрии эллипса находится в точке $(x_0; y_0)$, то легко показать, что уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (5)$$



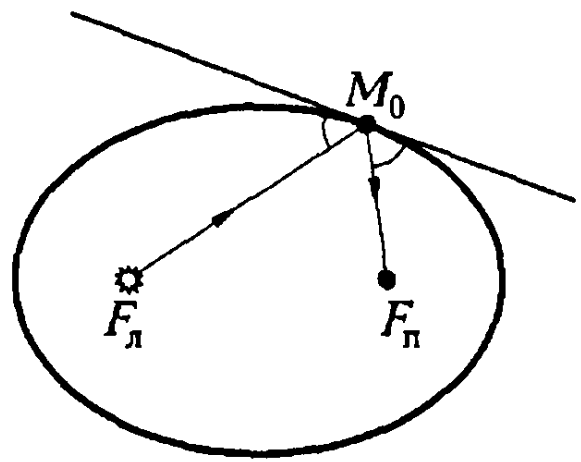
Произведем преобразование координат :

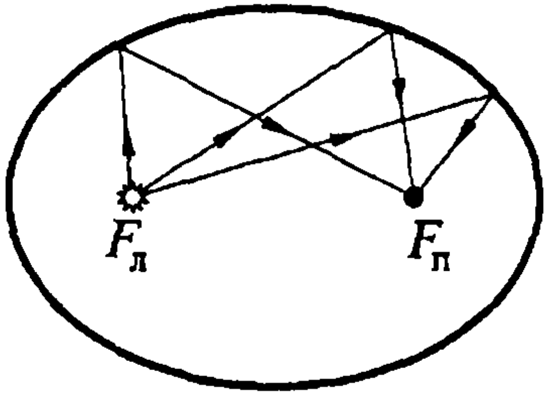
$$x' = x - x_0 \text{ и } y' = y - y_0,$$

В координатах x'; y' уравнение эллипса будет иметь канонический вид:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Оптическое свойство эллипса: касательная к эллипсу образует равные углы с фокальными радиусами точки касания.





Если поместить в один из фокусов эллипса с зеркальной «поверхностью» точечный источник света, то все лучи после отражения от «поверхности» эллипса сойдутся в другом его фокусе.

Пример 1. Привести уравнение эллипса $9x^2 + 16y^2 = 144$ к каноническому виду. Указать длины полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет.

Решение. Поделим обе части уравнения на 144

$$\frac{9x^2}{144} + \frac{16y^2}{144} = 1$$

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ - каноническое уравнение эллипса

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ - большая полуось эллипса

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$ - малая полуось эллипса

Фокусы лежат на оси абсцисс$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$, $F_1(-\sqrt{7}; 0)$ и $F_2(\sqrt{7}; 0)$; $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{4}$

Пример 2. Привести уравнение эллипса $16x^2 + 9y^2 = 144$ к каноническому виду. Указать длины полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет.

Решение. Поделим обе части уравнения на 144

$$\frac{16x^2}{144} + \frac{9y^2}{144} = 1$$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ - каноническое уравнение эллипса

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ - большая полуось эллипса

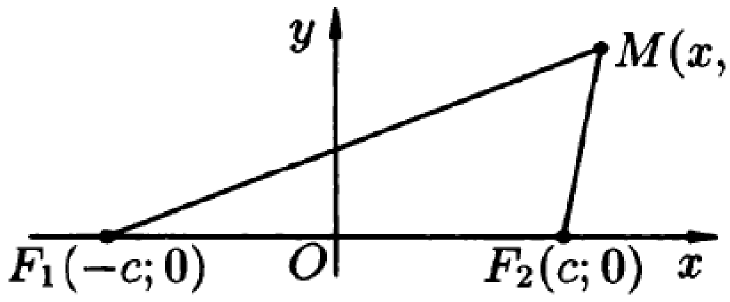
$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$ - малая полуось эллипса

Фокусы лежат на оси ординат; $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$, $F_1(0; -\sqrt{7})$ и $F_2(0; \sqrt{7})$; $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{4}$

Гипербола.

Определение. ***Гиперболой*** называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Пусть расстояние между фокусами F_1 и F_2 равно $2c$, а модуль разности расстояний до них от точек гиперболы равен
$2a$ $(0 < 2a < 2c)$.



Пусть $M(x; y)$ – произвольная точка гиперболы.
По определению гиперболы
$MF_1 - MF_2 = \pm 2a.$
Тогда

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

После упрощений, как это было сделано при выводе уравнения эллипса, получим $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

Обозначив $b^2 = c^2 - a^2 > 0$, получаем: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (6)$$

Уравнение (6) ***называется каноническим уравнением гиперболы***. Гипербола есть линия второго порядка.

Исследование формы гиперболы по ее уравнению.

Установим форму гиперболы по ее каноническому уравнению.

1. Уравнение (6) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ содержит x и y только в четных степенях, следовательно, гипербола симметрична относительно осей Ox и Oy, а также относительно точки $O(0; 0)$, которую называют центром гиперболы.

2. Найдем точки пересечения гиперболы с осями координат. Положив $y = 0$, находим две точки $A_1(a; 0)$, $A_2(-a; 0)$, в которых ось Ox пересекает гиперболу.

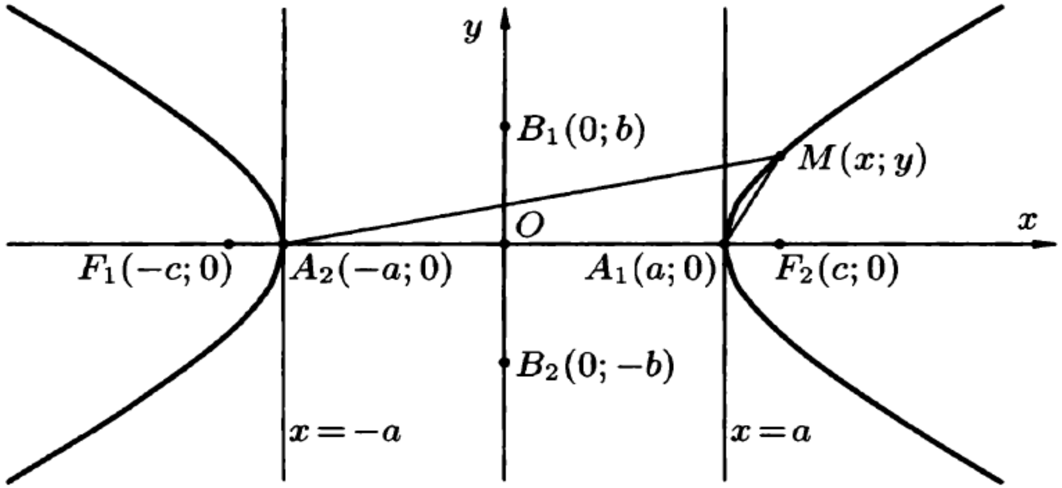
Положив в уравнении (6) $x = 0$, получаем $-\frac{y^2}{b^2} = 1$, чего быть не может. Следовательно, гипербола ось Oy не пересекает.

Отметим точки $B_1(0-b)$; $B_2(0;b)$.

Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются ***вершинами*** гиперболы,
$A_1A_2 = 2a$ - ***действительной осью***, B_1B_2 =2b – ***мнимой осью***
(***a – действительная полуось, b – мнимая полуось).***

3. Из уравнения (6) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ следует, что $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$ или $|x| \geq a$.
Это означает, что точки гиперболы расположены справа от прямой $x = a$ (правая ветвь гиперболы) и слева от прямой $x = -a$ (левая ветвь гиперболы).

4. Выразив *y* из уравнения (6), получаем: $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $|x| \geq a$,
это означает, что гипербола состоит из двух симметричных половин: верхней $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ и нижней $y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

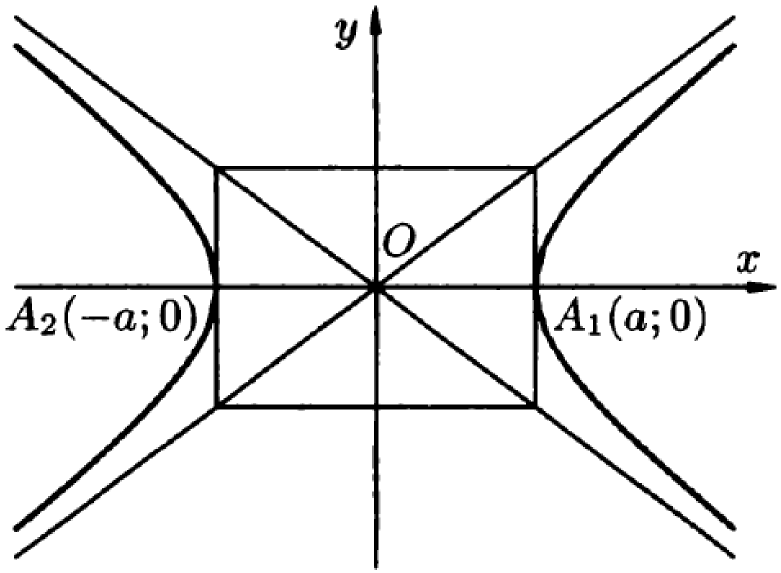


При неограниченном возрастании абсциссы точка гиперболы неограниченно приближается к прямой $y = \frac{b}{a}x$, которая называется ***асимптотой гиперболы.***

Из симметрии вытекает, что у гиперболы две асимптоты:

$$y = \frac{b}{a}x \qquad \text{и} \qquad y = -\frac{b}{a}x$$

Прямоугольник, с центром в начале координат, со сторонами $2a$ и $2b$, параллельными осям, называется ***основным*** (асимптоты являются его



диагоналями).
Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к величине действительной оси гиперболы: $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

$$2a < 2c \Rightarrow \varepsilon > 1.$$

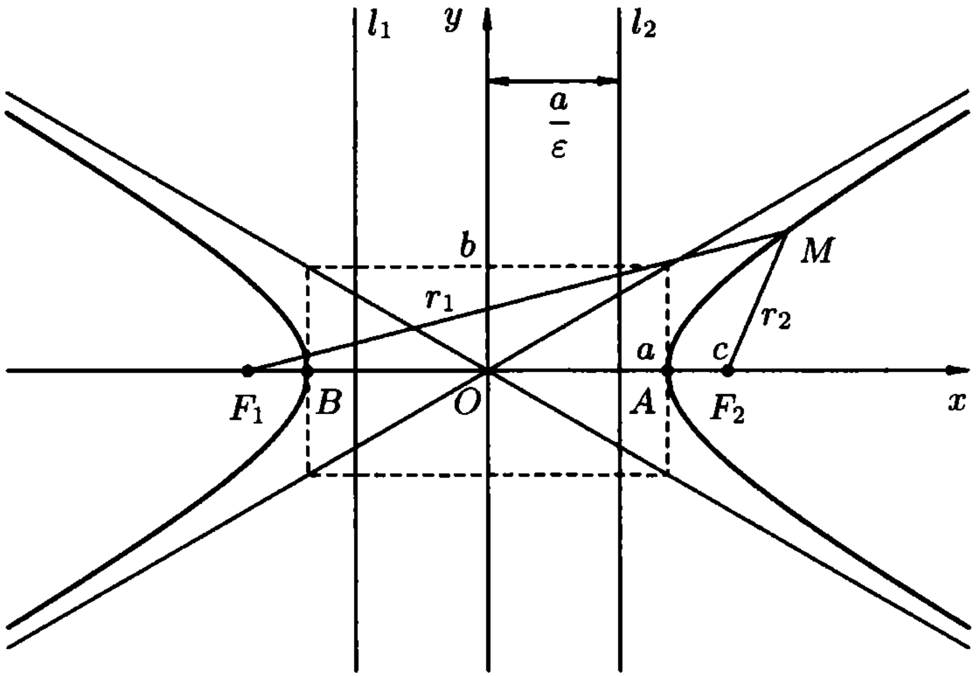
Эксцентриситет определяет форму гиперболы: чем меньше ε, тем более вытянут в направлении фокальной оси ее основной прямоугольник:

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} - 1 = \varepsilon^2 - 1.$$

Если $a = b$, то гипербола называется ***равносторонней.***
Для нее $x^2 - y^2 = a^2$, асимптоты: $y = x$ и $y = -x$, $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Прямые l_1и l_2: $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называются ***директрисами гиперболы.***

Правая директриса расположена между центром и правой вершиной гиперболы, левая - между центром и левой вершиной.



Директрисы

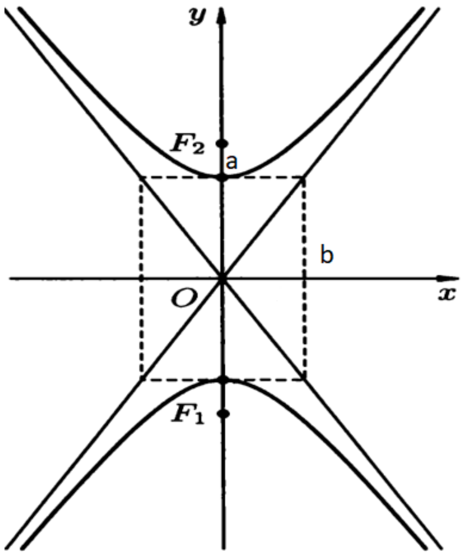
гиперболы имеют тоже свойство что и директрисы эллипса: $\frac{r}{d} = \varepsilon$

Теорема. Если r - расстояние от произвольной точки гиперболы до какого-нибудь фокуса, d - расстояние от этой же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету гиперболы ε.

Если фокусы гиперболы лежат на оси Oy, то уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad (7)$$

Эксцентриситет этой гиперболы равен $\varepsilon = \frac{c}{a}$



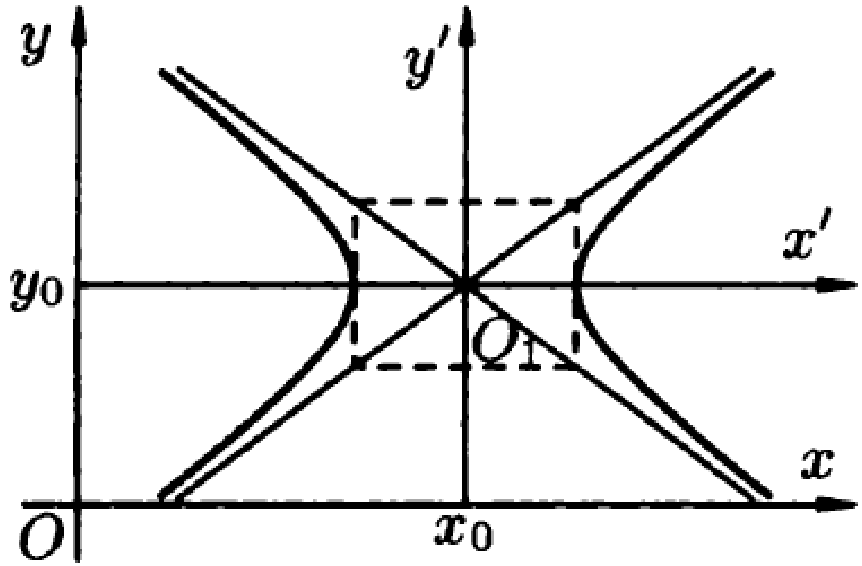
Асимптоты определяются уравнениями $y = \pm\frac{a}{b}x$,

а уравнения директрис $y = \pm\frac{a}{\varepsilon}$

Гипербола (7) называется ***сопряженной*** гиперболе (6).

Если центр симметрии гиперболы находится в точке $(x_0; y_0)$, то ее уравнение имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$



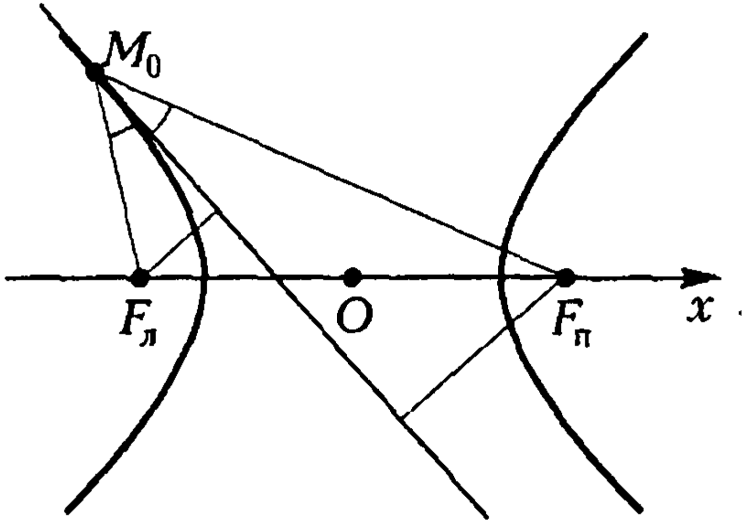
Уравнение асимптот такой гиперболы будет: $y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$.

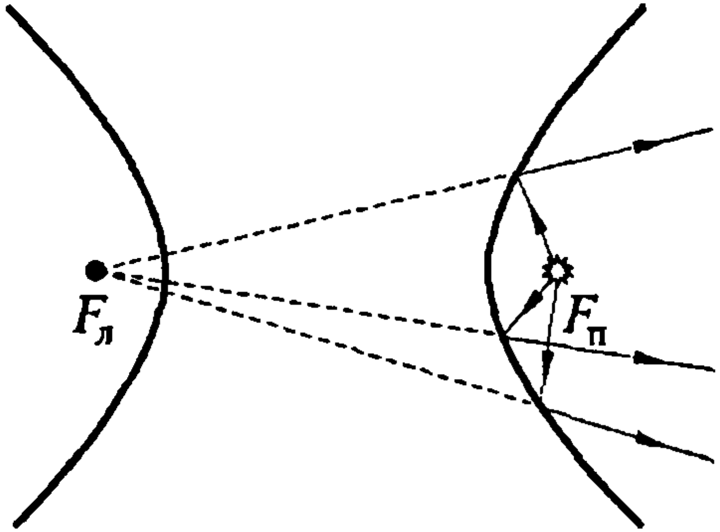
Это уравнение является каноническим уравнением гиперболы относительно декартовых координат x' и y', связанных с x и y формулами:

$$x' = x - x_0 \quad \text{и} \quad y' = y - y_0$$

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Оптическое свойство гиперболы: касательная к гиперболе образует равные углы с фокальными радиусами точки касания.





Если поместить в один из фокусов гиперболы точечный источник света, то каждый луч после отражения от зеркальной «поверхности» гиперболы видится исходящим из другого фокуса.

Пример. Привести уравнение гиперболы $16x^2 - 9y^2 = 144$ к каноническому виду. Указать длины полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис. Сделать чертеж

Решение. Поделим обе части уравнения на 144. $\frac{16x^2}{144} - \frac{9y^2}{144} = 1$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ - каноническое уравнение гиперболы

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$ - действительная полуось гиперболы

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$ - мнимая полуось гиперболы

Фокусы гиперболы лежат на оси абсцисс

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25} = 5$, $F_1(-5; 0)$ и $F_2(5; 0)$; $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

Директрисы: $y = \pm\frac{4}{3}x$.

Пример. Привести уравнение гиперболы $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$ к каноническому виду. Указать длины полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис. Сделать чертеж

Решение. Перенесем свободный член 144 вправо и поделим на него обе части уравнения $\frac{16x^2}{144} - \frac{9y^2}{144} = -1$ =>

$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$- каноническое уравнение гиперболы

$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ - действительная полуось гиперболы

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$ - мнимая полуось гиперболы

Фокусы гиперболы лежат на оси ординат

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25} = 5$, $F_1(0; -5)$ и $F_2(0; 5)$; $\varepsilon = \frac{5}{4}$.

Асимптоты: $y = \pm\frac{4}{3}x$

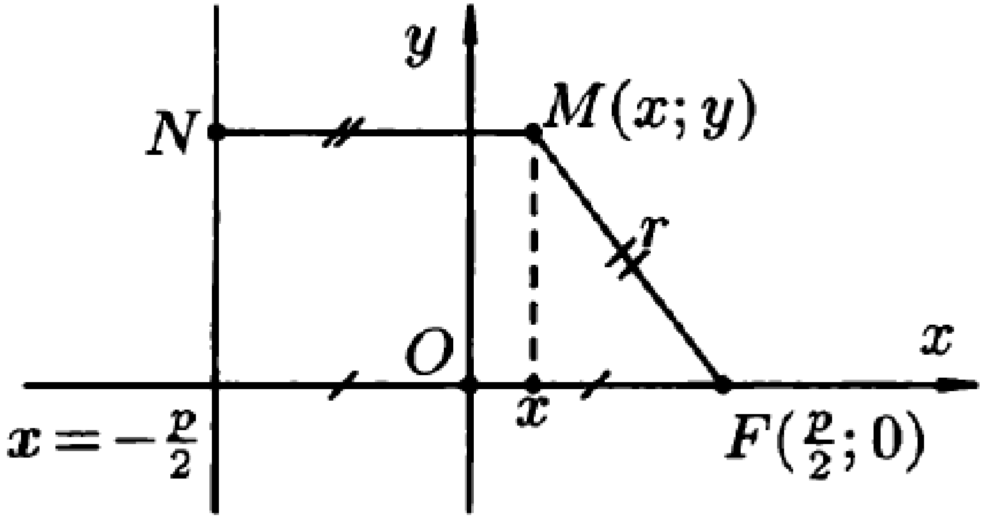
Парабола.

Определение. ***Параболой*** называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой. Расстояние от фокуса F до директрисы называется ***параметром*** параболы и обозначается через p $(p > 0)$.

Для вывода уравнения параболы выберем систему координат Oxy так, чтобы ось Ox проходила через фокус F перпендикулярно директрисе в направлении от директрисы к F, а начало координат O расположим посередине между фокусом и директрисой.

Тогда $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а уравнение директрисы имеет вид: $x = -\frac{p}{2}$.

По определению параболы
$MF = MN$.
Тогда $MN = x + \frac{p}{2}$, $MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$.



Приравнивая, получаем:

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$$

$$\boldsymbol{y^2 = 2px}. \quad \textbf{(8)}$$

Уравнение (8) называется ***каноническим уравнением параболы.***

$\boldsymbol{y^2 = 2px}$

Исследование форм параболы по ее уравнению.

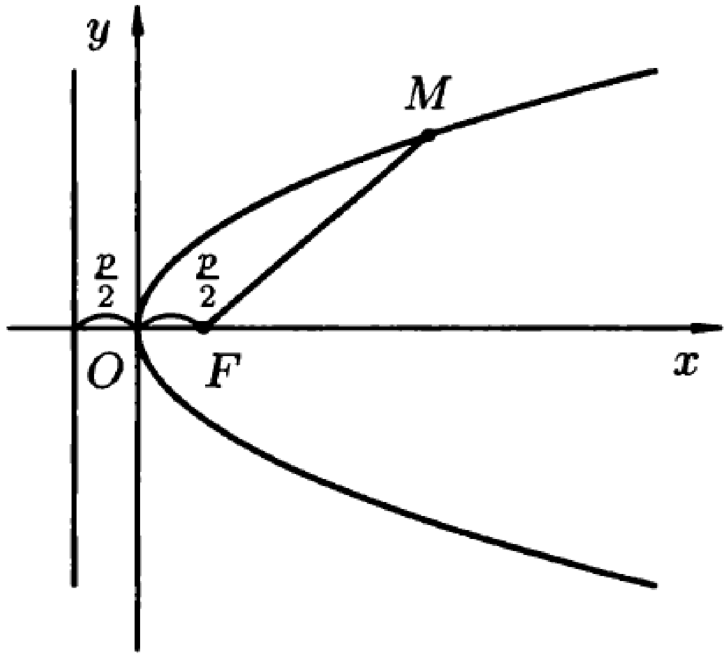
1. В уравнении (8) $y^2 = 2px$ переменная y входит в четной степени, значит,парабола симметрична относительно оси Ox; ось Ox является осью симметрии параболы. Ось симметрии параболы называется ***фокальной осью***.

2. Так как $p > 0$, то из (8) следует, что $x \geq 0$. Следовательно, парабола расположена справа от оси Oy.

3. При $x = 0$ имеем $y = 0$. Следовательно, парабола проходит через начало координат.

4. При неограниченном возрастании x модуль y также неограниченно возрастает.

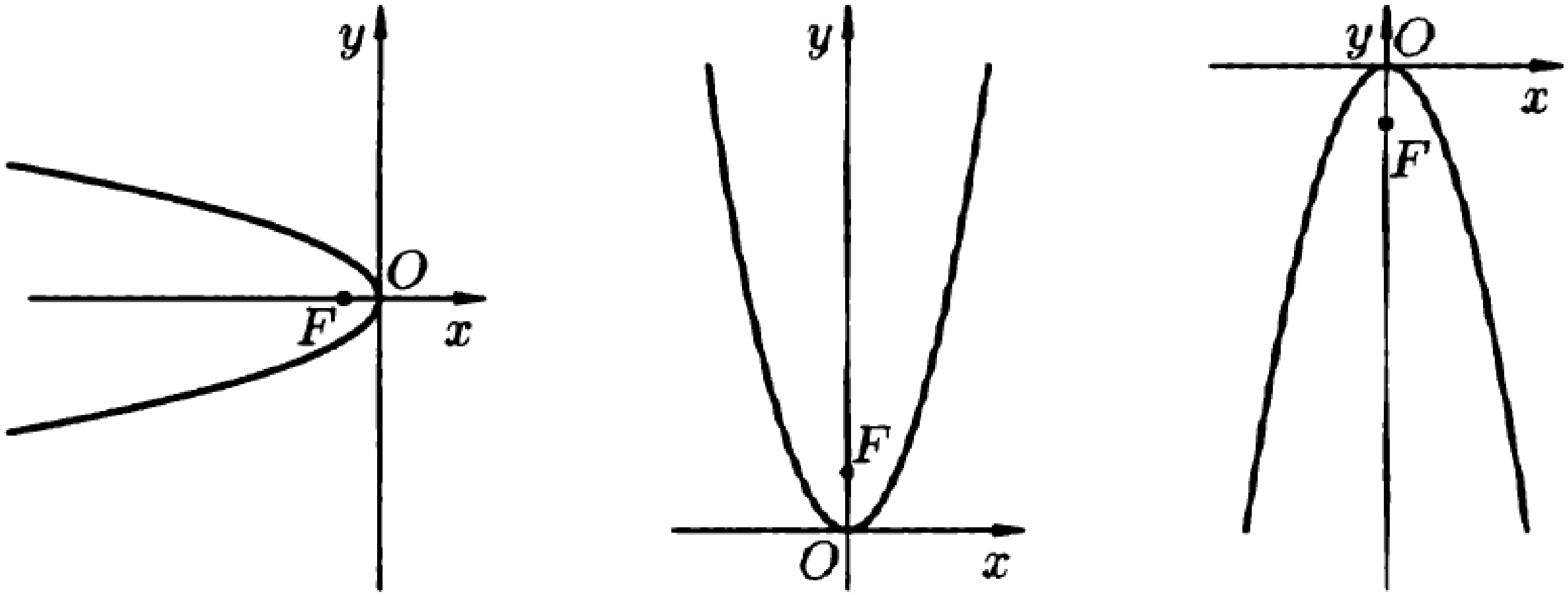
Точка $O(0; 0)$ называется ***вершиной параболы***, отрезок $FM = r$ называется ***фокальным радиусом*** точки M.



Уравнения

$$y^2 = -2px, \qquad x^2 = 2py, \qquad x^2 = -2py \quad (p > 0)$$

также определяют параболы.

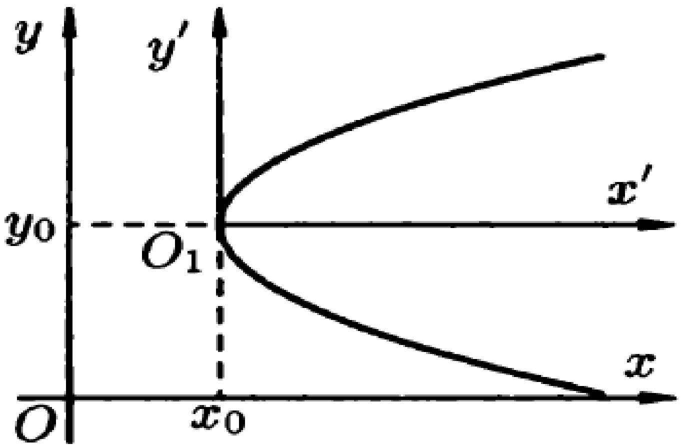


$y^2 = -2px$ $\quad$ $x^2 = 2py$ $\quad$ $x^2 = -2py$

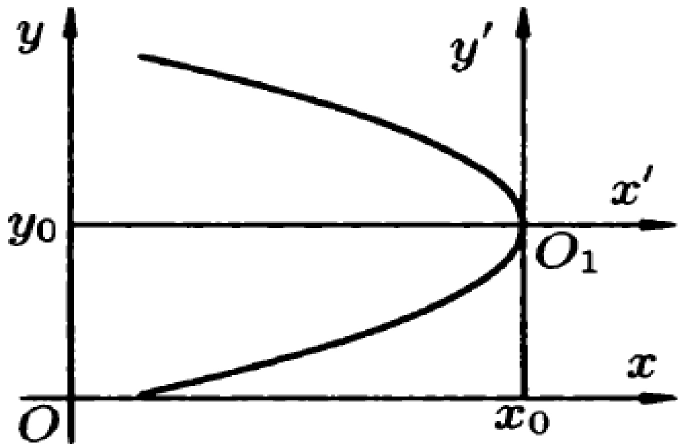
Нетрудно показать, что график квадратного трехчлена

$$y = Ax^2 + Bx + C = 0,$$

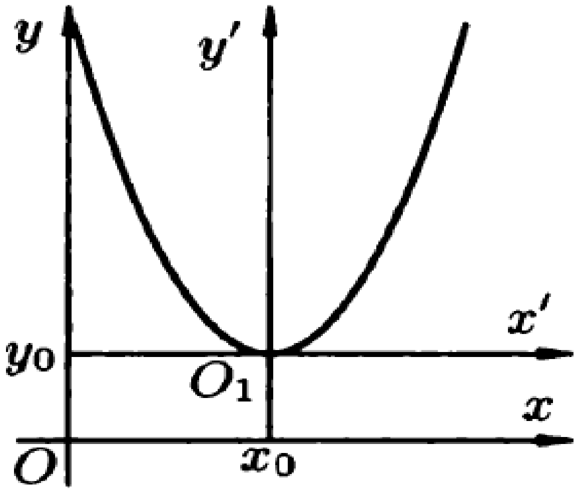
где $A \neq 0$, B и C любые действительные числа, представляет собой параболу в смысле приведенного выше ее определения. Если вершина параболы находится в точке $(x_0; y_0)$, то уравнение такой параболы имеет вид:



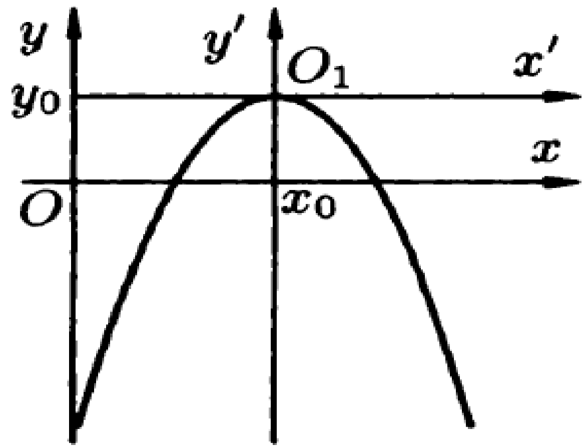
$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$$



$$(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0)$$



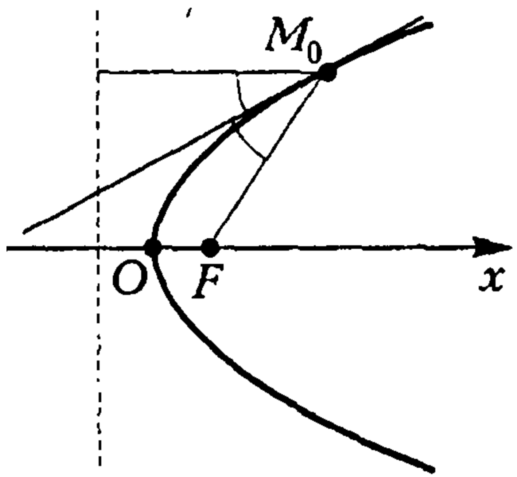
$$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$$

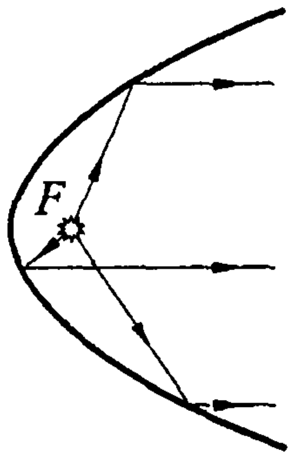


$$(x-x_0)^2 = -2p(y-y_0)$$

Эти уравнения являются каноническими уравнениями параболы относительно декартовых координат x' и y', связанных с x и y формулами: $x' = x - x_0$ и $y' = y - y_0$.

Оптическое свойство параболы: Если в фокус параболы помещен точечный источник света, то все лучи, отраженные от зеркальной «поверхности» параболы, будут направлены параллельно оси параболы.





Пример. Найти фокус, директрису, фокальную ось для параболы $y = 4x^2$.

Решение: Осью симметрии параболы $y = x^2$ является ось Oy, а вершиной - точка O, поэтому фокальной осью будет ось Oy, вершиной - начало координат.

Для определения фокуса и директрисы запишем уравнение данной параболы в виде:

$$x^2 = \frac{1}{4}y,$$

откуда $2p = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{8}$.

Тогда фокус имеет координаты $F\left(0; \frac{1}{16}\right)$, а уравнение директрисы:

$$y = -\frac{1}{16}.$$

Приведение общего уравнения второго порядка к каноническому виду.

Рассмотрим общее уравнение кривой второго порядка:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Пусть $2B = 0$, тогда уравнение примет вид:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (10)$$

Теорема. Уравнение (10) всегда определяет: либо окружность (при $A = C$), либо эллипс (при $A \cdot C > 0$), либо гиперболу (при $A \cdot C < 0$), либо параболу (при $A \cdot C = 0$). При этом возможны случаи вырождения: для эллипса (окружности) - в точку или мнимый эллипс (окружность), для гиперболы - в пару пересекающихся прямых ($\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$), для параболы - в пару параллельных прямых ($(x \pm y)^2 = R^2$).

Для приведения (10) к каноническому виду, необходимо дополнить члены, содержащие x и y, до полных квадратов.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение кривой

$$x^2 - 2y^2 + 2x + 12y - 33 = 0$$

и построить ее.

Решение. Выделим полный квадрат по x и y:

$$x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1 = (x+1)^2 - 1;$$

$$-2y^2 + 12y = -2(y^2 - 6y) = -2(y^2 - 6y + 9 - 9) =$$
$$= -2(y-3)^2 + 18.$$

Данное уравнение теперь можно переписать так:

$$(x+1)^2 - 2(y-3)^2 - 1 + 18 - 33 = 0,$$

отсюда

$$(x+1)^2 - 2(y-3)^2 = 16$$

или

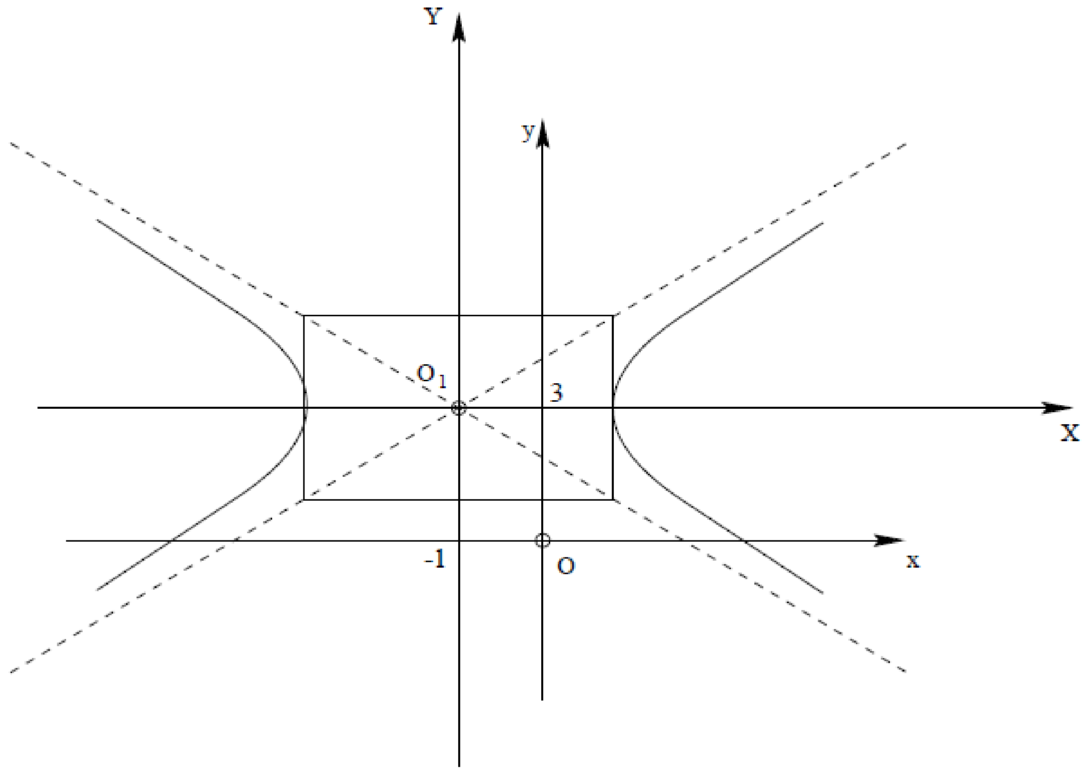
$$\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{8} = 1.$$

Это уравнение является каноническим уравнением гиперболы относительно декартовых координат x' и y', связанных с x и y формулами: $x' = x + 1$ и $y' = y - 3$.

Таким образом, центр симметрии данной гиперболы находится в точке $(-1; 3)$. Полуоси: $a = 4$ и $b = 2\sqrt{2}$.
Фокусы гиперболы лежат на действительной оси, параллельной оси

Ox. $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{6}$, $F_1(2\sqrt{6} - 1; 3)$ и $F_2(-2\sqrt{6} - 1; 3)$

Уравнение асимптот гиперболы: $y = 3 \pm \frac{2\sqrt{2}}{4}(x + 1)$.


Y
y
O_1
3
X
-1
O
x

Пример. Показать, что уравнение $4y^2 - 8y - x^2 - 6x - 9 = 0$ определяет гиперболу. Найти координаты ее фокусов, указать систему координат, в которой уравнение гиперболы имеет канонический вид.

Решение. Выделим полные квадраты по переменным x и y.

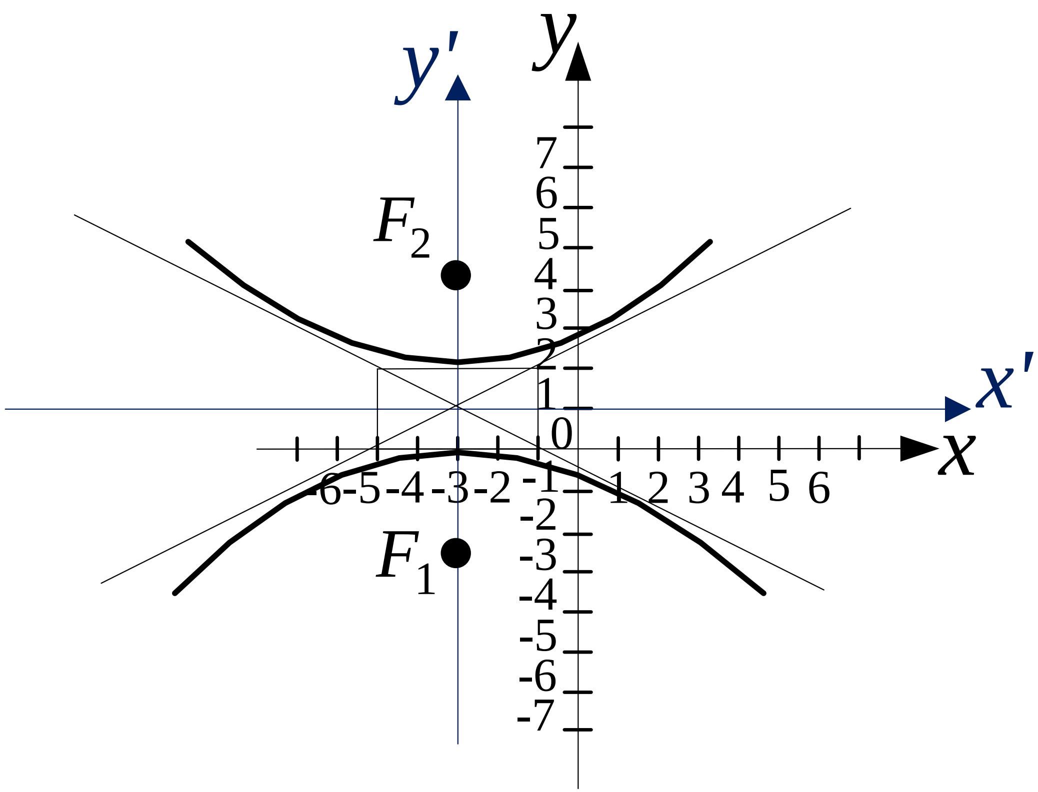
$$4(y^2 - 2y + 1) - 4 - (x^2 + 6x + 9) = 0$$

$$4(y - 1)^2 - (x + 3)^2 = 4$$

Поделим обе части уравнения на 4.

$(y - 1)^2 - \frac{(x+3)^2}{4} = 1$ уравнение гиперболы с центром O'(-3;1) в системе координат $O'x'y'$ имеет канонический вид:

$$y'^2 - \frac{x'^2}{4} = 1$$



$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$- действительная полуось гиперболы;
$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 -$ мнимая полуось
Фокусы гиперболы лежат на действительной оси, параллельной оси Oy. $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5}$, $F_1(-3; 1 + \sqrt{5})$ и $F_2(-3; 1 - \sqrt{5})$

Уравнения асимптот в системе координат $O'x'y'$: $y'=\pm\frac{1}{2}x'$

Пример. Определить тип кривой. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=0$

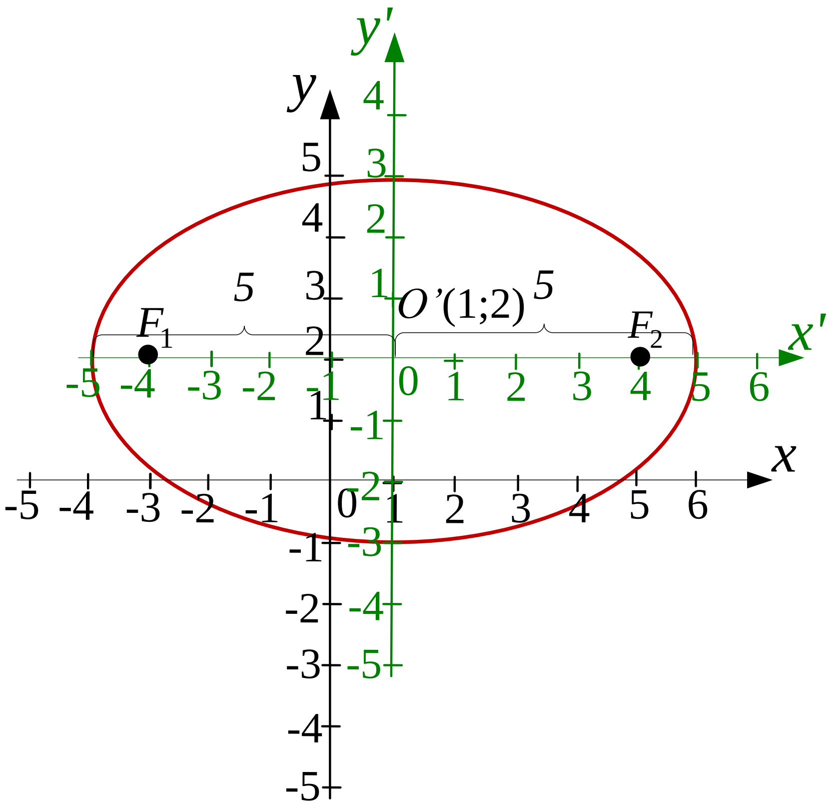
Решение. $(\frac{x}{2}-\frac{y}{3})(\frac{x}{2}+\frac{y}{3})=0$. Это две прямые: $y=\pm\frac{3x}{2}$

Пример. Составить уравнение кривой, сумма расстояний от каждой точки которой до двух заданных точек $F_1(-3;2)$ и $F_2(5;2)$ -величина постоянная, равная 10.

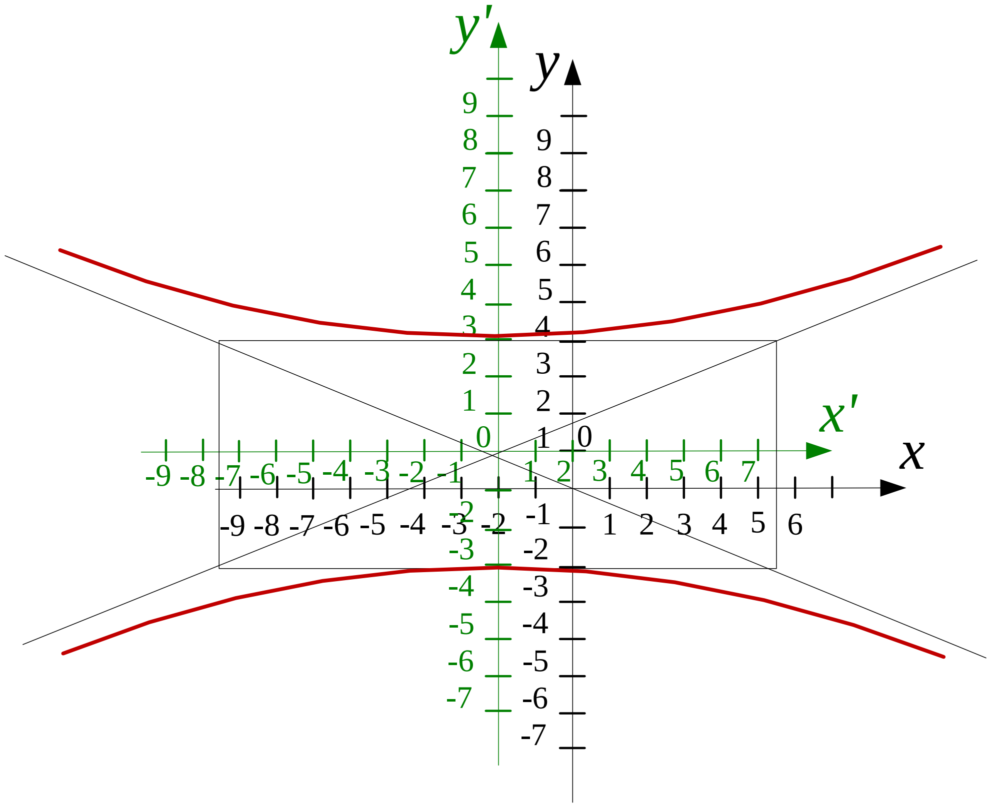
Решение. По определению мы видим, что это эллипс. Фокусы расположены на прямой y=2, параллельной оси OX. 2a=10 =>a=5; c = (5+3)/2=4;

b=$\sqrt{a^2-c^2}$=$\sqrt{25-16}$=3; Центр кривой: O' ($\frac{-3+5}{2}$;2)= (1;2).

Уравнение: $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1.$

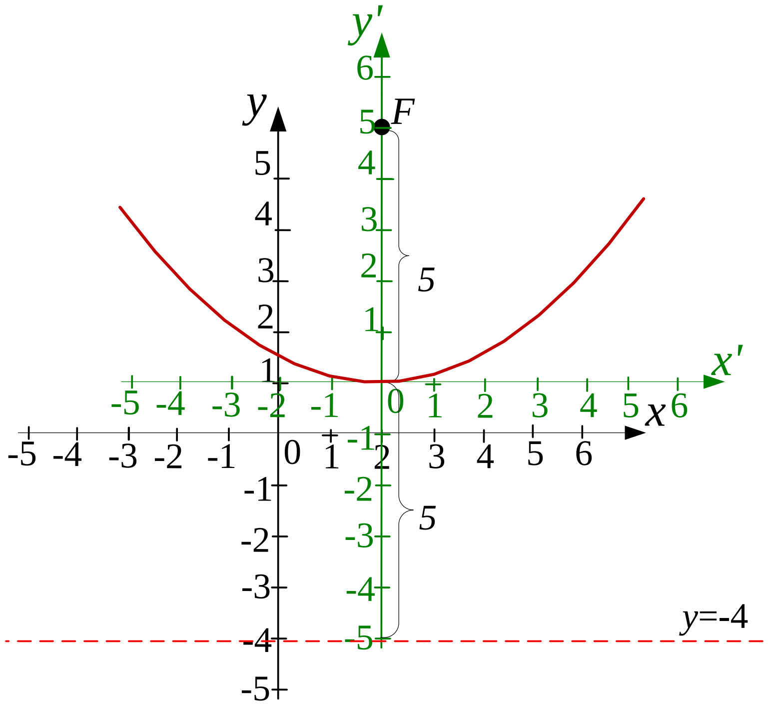

y'
y
x'
x
O'(1;2)
F1
F2
5
5

Пример. Составить уравнение кривой, модуль разности расстояний от каждой точки которой до двух заданных точек $F_1(-2;-7)$ и $F_2(-2;9)$ -величина постоянная, равная 6.
Решение. По определению мы видим, что это гипербола. Фокусы расположены на прямой x = -2, параллельной оси OY.
2a=6 =>a=3; c = (9+7)/2=8; b=$\sqrt{c^2-a^2}$=$\sqrt{64-9}$=$\sqrt{55} \approx 7{,}4$
Центр кривой: O' (-2; $\frac{-7+9}{2}$)= (-2;1).
Уравнение: $-\frac{(x+2)^2}{55}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$ или $\frac{(x+2)^2}{55}-\frac{(y-1)^2}{9}=-1$


y'
y
x'
x

Пример. Составить уравнение кривой, каждая точка которой равноудалена от прямой y = -4 и точки F(2;6).

Решение. По определению мы видим, что это парабола. Ее директриса y = -4, а точки F(2;6) – фокус. Центр параболы находится между фокусом и директрисой. O' (2; $\frac{-4+6}{2}$)= (2;1). Парабола направлена ветками вверх. Уравнение такой параболы: $x^2 = 2py$. Параметр p =10- расстояние между директрисой и фокусом. Таким образом, уравнение кривой будет выглядеть так: $(x-2)^2 = 20(y-1)$

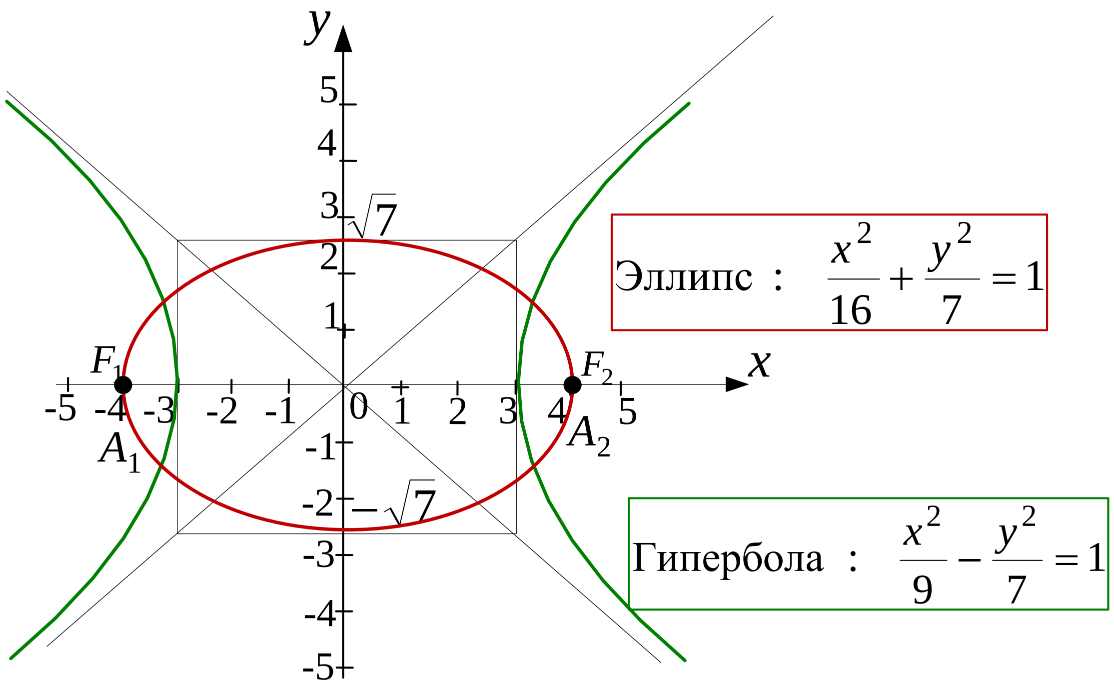


Пример. Дана гипербола: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$. Написать уравнение эллипса, вершины которого находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах данной гиперболы.

Решение. Для гиперболы с=$\sqrt{a^2 + b^2}$=$\sqrt{9 + 7}$ = 4; Фокусы гиперболы $F_1(-4; 0)$ и $F_2(4; 0)$. Вершины гиперболы $A_1(-3; 0)$ и $A_2(3; 0)$.

Тогда вершинами эллипса $A_1(-4; 0)$ и $A_2(4; 0)$, а фокусы $F_1(-3; 0)$ и $F_2(3; 0)$. Тогда для эллипса a=4; а c=3 => b=$\sqrt{a^2 - c^2}$=$\sqrt{16 - 9}$ = $\sqrt{7}$

Уравнение эллипса будет выглядеть так: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$


y
x
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
$\sqrt{7}$
$-\sqrt{7}$
F_1
F_2
A_1
A_2
Эллипс : $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$
Гипербола : $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$