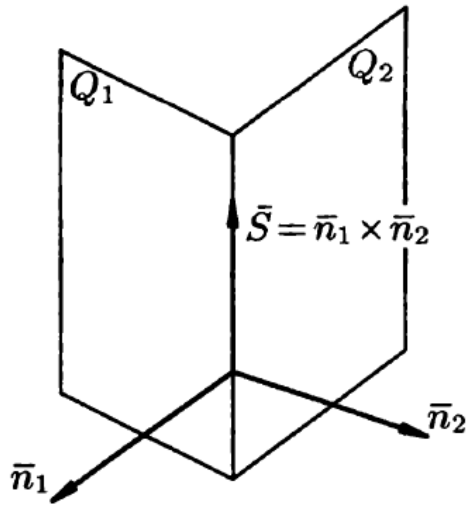
ЛЕКЦИЯ 10

Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости.

1.Общее уравнение.

Прямую в пространстве можно задать как пересечение двух непараллельных плоскостей. Если плоскости не параллельны, т.е. их нормальные векторы

$\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ не коллинеарны, то система уравнений



$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

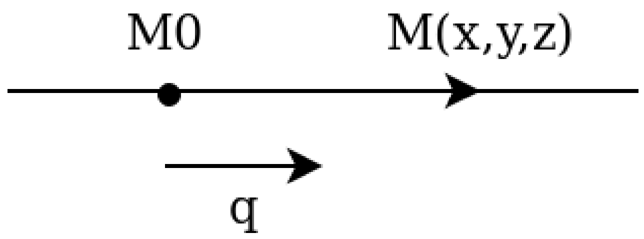
определяет единственную прямую и называется ***общим уравнением прямой в пространстве.***

2. Каноническое уравнение.

Составим уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельно направляющему вектору $\vec{q}(l, m, n)$. Для этого возьмем на прямой любую точку $M(x, y, z)$ и напишем условие коллинеарности вектора $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{q}$.

точка $M(x, y, z) \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{q} \Leftrightarrow$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \qquad (2)$$



Координаты любой точки, принадлежащей данной прямой, удовлетворяют этому уравнению, а координаты точки, не принадлежащей прямой, не удовлетворяют.

Это ***каноническое уравнение прямой.***

Уравнение (2) равносильно системе двух уравнений первой степени:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m}, \\ \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}. \end{cases} \tag{3}$$

Равенство $\frac{x-x_0}{l} = \frac{z-z_0}{n}$ является следствием первых двух.

Таким образом, каноническое уравнение (2) задает прямую пересечением двух плоскостей.

Плоскости, задаваемые уравнениями (3) обладают особенностями: первая из них параллельна оси *Oz*, вторая – оси *Ox*.

Замечание.

Если направляющий вектор $\vec{q}$ имеет координаты $\vec{q} = (0; m; n)$, то уравнение (5) будут иметь вид:

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

В этом случае $\vec{q} \perp Ox$ и $x = x_0$.

Аналогично, прямая

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{n}$$

параллельна оси Oz, т.к. в этом случае $\vec{q} \perp Ox$ и $\vec{q} \perp Oy$

$(x = x_0, y = y_0)$.

3. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Для получения уравнения прямой, проходящей через две точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$, в качестве направляющего вектора, выберем вектор $\vec{q} = \overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$

Тогда каноническое уравнение прямой примет вид:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \qquad (4)$$

Пример 1. Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $A(0,1,-2)$ и $B(3,-4,5)$.

Найдем направляющий вектор $\overrightarrow{AB} = (3,-5,7)$. Подставляя в каноническое уравнение координаты точки A и координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ соответственно, получим:

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{7}$$

4. Параметрическое уравнение

Если уравнение (2) приравнять параметру t,

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} = t;\ t \in (-\infty; +\infty),$$

получим параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = x_0 + lt} \\ \boldsymbol{y = y_0 + mt} \\ \boldsymbol{z = z_0 + nt} \end{cases} \qquad (5)$$

Запишем уравнения из примера 1 в параметрическом виде:

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{7} = t$$

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 5t \\ z = -2 + 7t \end{cases}$$

5. Приведение общего уравнения к каноническому виду.

Чтобы перейти от общего уравнения к каноническому необходимо найти направляющий вектор и любую точку $M_0 \in L$.

Общее уравнение: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$

Направляющий вектор:

$$\vec{q} = [\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$$

Для нахождения точки M_0 одну координату выбираем произвольно, например $x = x_0$, подставляем в общее уравнение и, решив систему, находим y_0 и z_0. Зная $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $\vec{q}$, составляем каноническое уравнение прямой.

Пример 2. Привести общее уравнение прямой $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0, \\ 5x + 4y - z - 7 = 0. \end{cases}$

к каноническому виду.

Решение:

В качестве направляющего вектора выберем вектор $\vec{q} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

$$\vec{q} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -11\vec{i} + 17\vec{j} + 13\vec{k}.$$

Пусть $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} -y + 3z - 1 = 0, \\ 4y - z - 7 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3z - 1, \\ 4(3z - 1) - z - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ z = 1. \end{cases}$

Таким образом, найден точка $M_0(0; 2; 1) \in l$.

Окончательно, каноническое уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x}{-11} = \frac{y-2}{17} = \frac{z-1}{13}$$

Пример 3. Записать общие уравнения прямой, заданной в параметрическом виде: $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 - t, \\ z = 3t \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 - t, \\ z = 3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = x - 1, \\ t = -y + 2, \\ t = \dfrac{z}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow x - 1 = -y + 2 = \frac{z}{3} \text{ (каноническое уравнение)}$$

Выберем два уравнения:

$$\begin{cases} x - 1 = -y + 2, \\ x - 1 = \dfrac{z}{3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ 3x - z - 3 = 0 \end{cases}$$

6. Угол между прямыми.

Угол между прямыми – это острый угол между направляющими векторами. Пусть заданы две прямые своими каноническими уравнениями:

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}; \; L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$$

$$\cos\widehat{(L_1, L_2)} = |\cos(\overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2})| = \frac{|(\overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2})|}{|\overrightarrow{q_1}| \cdot |\overrightarrow{q_2}|} = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}} \qquad (6)$$

7. Взаимное расположение прямых.

- **Прямые параллельны**, $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{q_1} \parallel \overrightarrow{q_2} \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \qquad (*)$$

- **Прямые совпадают**, если $\overrightarrow{M_1 M_2} \parallel \overrightarrow{q_1} \parallel \overrightarrow{q_2}$, т.е. к условию (*) добавляется:

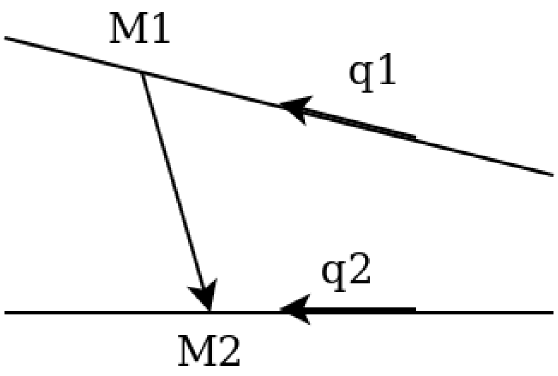
$$\frac{x_2-x_1}{l_1}=\frac{y_2-y_1}{m_1}=\frac{z_2-z_1}{n_1}$$

- **Прямые перпендикулярны,** $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{q_1} \perp \overrightarrow{q_2} \Leftrightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$$

- **Прямые пересекаются,** $\Leftrightarrow$
  $\overrightarrow{q_1} \nparallel \overrightarrow{q_2}$ (т.е. (*) не выполняется!) и прямые лежат в одной плоскости,

т.е. $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{q_1}$ и $\overrightarrow{q_2}$ компланарны $\Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{q_1} \cdot \overrightarrow{q_2} = 0 \Leftrightarrow$



$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (**)$$

Если прямые пересекаются, то чтобы найти ***точку пересечения прямых***, надо:

1) L_1 представить в параметрическом виде:
$$x = x_1 + l_1 t,\ y = y_1 + m_1 t,\ z = z_1 + n_1 t;$$
2) подставить эти уравнения в L_2:
$$\frac{x_1 + l_1 t - x_2}{l_2} = \frac{y_1 + m_1 t - y_2}{m_2} = \frac{z_1 + n_1 t - z_2}{n_2};$$

3) найти t_0 – решение, удовлетворяющее всем трем уравнениям;
4) подставить t_0 в L_1 и получить $x_0 = x_1 + l_1 t_0$, $y_0 = y_1 + m_1 t_0$ и $z_0 = z_1 + n_1 t_0$ – координаты $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точки пересечения.

- **Прямые скрещиваются** (не лежат в одной плоскости) $\Leftrightarrow$ $\Delta \neq 0$, т.е. (**) не выполняется

Пример 4. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M(1;2;3), параллельно прямой $\frac{x-9}{2} = \frac{y+10}{3} = \frac{z-5}{-4}$;

Ответ: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-4}$

Пример 5. Исследовать взаимное расположение 2-х прямых. Если они пересекаются, то найти точку их пересечения, если скрещиваются, то найти угол между ними.

а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{1}$; $\frac{x+1}{4}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+5}{3}$

Решение:

Прямые не параллельны, так как , $\overrightarrow{q_1}(2;-3;1) \nparallel$ и $\overrightarrow{q_2}$(4;-2;3).

$M_1(1,2,3)\in\ L_1;\ M_2(-1,5,-5)\in\ L_2$

Найдем $\Delta=\begin{vmatrix}-2 & 3 & -8\\ 2 & -3 & 1\\ 4 & -2 & 3\end{vmatrix}=-56\neq 0,$ =>

прямые скрещиваются.

$$\cos\left(\overset{\wedge}{L_1, L_2}\right) == \frac{|(\overrightarrow{q_1}, \overrightarrow{q_2})|}{|\overrightarrow{q_1}| \cdot |\overrightarrow{q_2}|} = \frac{17}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{29}}; \ \varphi = arccos\left(\frac{17}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{29}}\right)$$

б) $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{-3}; \ L_2: \ \frac{x-2}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$

Решение:

Прямые не параллельны, так как , $\overrightarrow{q_1}(1; 2; -3) \nparallel \overrightarrow{q_2}$(-2;1;2).

$M_1(1,5,2) \in L_1; \ M_2(2,2,3) \in L_2$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 =>$$

прямые пересекаются.

Представим прямую L_1 в параметрическом виде: $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 5 + 2t, \\ z = 2 - 3t. \end{cases}$ и подставим в уравнение прямой L_2.

$\frac{t-1}{-2} = \frac{2t+3}{1} = \frac{-3t-1}{2}$; решим три уравнения:

$\frac{t-1}{-2} = \frac{2t+3}{1}$ => t = - *1*

$\frac{t-1}{-2} = \frac{-3t-1}{2}$ => t = - *1*

$\frac{2t+3}{1} = \frac{-3t-1}{2}$ => t = - *1*

Точке пересечения двух прямых соответствует параметр t = - 1. Подставив значение параметр t= - 1 в параметрическое уравнение первой прямой получим *x=0; y=3; z=5.*

Ответ: Прямые пересекаются в точке $M_0(0{,}3{,}5)$.

в) $L_1: \begin{cases} x - y - z + 1 = 0 \\ x + y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$; $L_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}$

Решение: Найдем направляющие векторы прямых.

$$\overrightarrow{q_1} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1; -3; 2);\ \overrightarrow{q_2}=(1;3;-2);$$

$\frac{-1}{1} = \frac{-3}{3} = \frac{2}{-2}$ => $L_1 \parallel L_2$ или совпадают.

$M_2(1,2,-1) \in L_2$ находим из уравнения прямой.

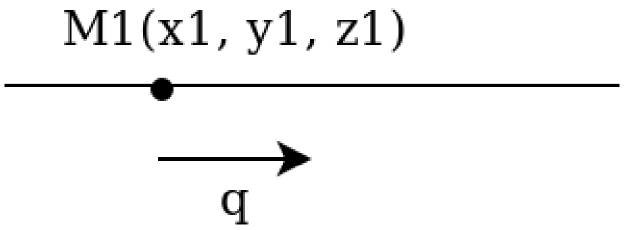
Выберем точку на L_1. Для этого возьмем *x=0* и найдем из системы $\begin{cases} -y - z + 1 = 0 \\ y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$; => *y=0; z=1*. Итак $M_1(0,0,1) \in L_1; \overrightarrow{M_1M_2}(1;2;-2) \nparallel \ \vec{q_1}$; следовательно прямые не совпадают, они параллельны .

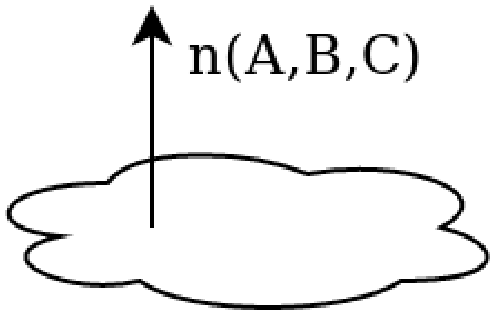
Можно было проверить этот факт другим способом. Точку $M_2(1,2,-1) \in L_2$ подставить в уравнение L_1 и убедится, что она не удовлетворяет системе, следовательно не принадлежит L_1. Ответ: $L_1 \parallel L_2$.

8. Прямая и плоскость. Взаимное расположение.

Даны прямая и плоскость.

Прямая $L: \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ Плоскость $P: Ax + By + Cz + D = 0$



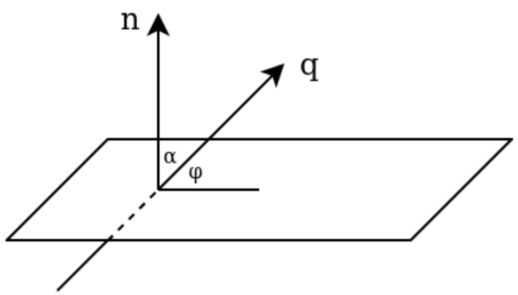


1) $\boldsymbol{L \parallel P} \Leftrightarrow \vec{\boldsymbol{n}} \perp \vec{\boldsymbol{q}} \Leftrightarrow (\vec{\boldsymbol{n}}, \vec{\boldsymbol{q}}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{Al} + \boldsymbol{Bm} + \boldsymbol{Cn} = \mathbf{0}$

2) $\boldsymbol{L \perp P} \Leftrightarrow \vec{\boldsymbol{n}} \parallel \vec{\boldsymbol{q}} \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{l}} = \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{m}} = \frac{\boldsymbol{C}}{\boldsymbol{n}}$

3) ***Угол между прямой и плоскостью*** -это угол между прямой и её проекцией на плоскость. $\sin\varphi = |\cos\alpha|$

$$\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\varphi} = |cos(\pi/2 - \varphi)| = \frac{\left|\left(\overrightarrow{\boldsymbol{n}}, \overrightarrow{\boldsymbol{q}}\right)\right|}{|\vec{\boldsymbol{n}}| \cdot |\vec{\boldsymbol{q}}|} = \frac{|\boldsymbol{Al}+\boldsymbol{Bm}+\boldsymbol{Cn}|}{\sqrt{\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{C}^2} \cdot \sqrt{\boldsymbol{l}^2+\boldsymbol{m}^2+\boldsymbol{n}^2}} \qquad (7)$$



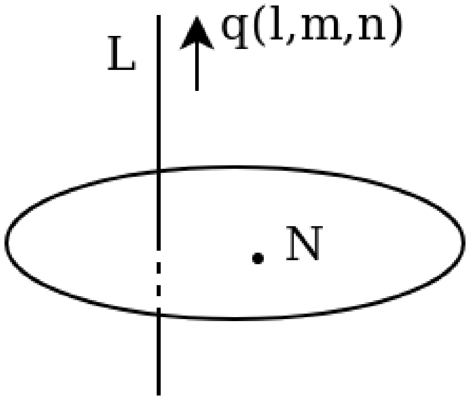
Пример 6. Найти угол между прямой $\frac{x+1}{1}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-7}{4}$ и плоскостью: $2x+3y-z-5=0$;

Выпишем направляющий вектор прямой и нормаль к плоскости: $\vec{\boldsymbol{q}}(\mathbf{1};-\mathbf{2};\mathbf{4})$; $\vec{\boldsymbol{n}}(\mathbf{2};\mathbf{3};-\mathbf{1})$

$$\sin\varphi=\frac{|(\vec{n},\vec{q})|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{q}|}=\frac{|2-6-4|}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{14}}=\frac{8}{7\sqrt{6}}$$

$$\varphi=\arcsin\left(\frac{8}{7\sqrt{6}}\right)$$

4) Уравнение плоскости, проходящей через точку $N(x_0, y_0, z_0)$, перпендикулярно прямой L:

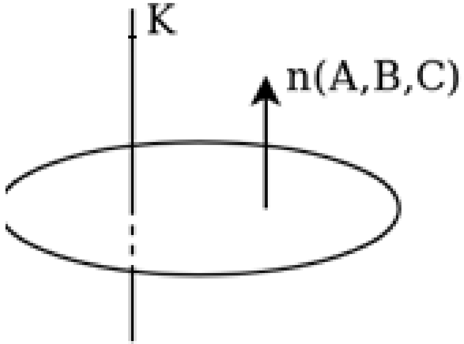


$$l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0 \qquad (8)$$

$\bar{q}$ - направляющий вектор прямой является нормалью для плоскости.

5) Уравнение прямой, проходящей через точку $K(x_0, y_{k0}, z_0)$, перпендикулярно плоскости P:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} \qquad (9)$$



Нормаль к плоскости является направляющим вектором прямой.

Пример 7. Дана точка $A(1,0,-3)$ и плоскость : $x-3z+8=0$. Составить уравнение перпендикуляра к плоскости, проходящего через точку A.

Решение: Зная уравнение плоскости, выпишем нормаль $\bar{n}$(1;0;-3); тогда каноническое уравнение искомой прямой:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{-3}.$$

Пример 8. Дана точка $A(1,0,-3)$ и прямая l: $\frac{x+1}{2}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z-7}{4}$.
Написать уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно к прямой l.

Решение. Направляющий вектор $\vec{q}=(2;-1;4)$ прямой l является одновременно перпендикуляром к искомой плоскости.
Поэтому уравнение плоскости имеет вид $2(x-1)-1y+4(z+3)=0$,
откуда
$2x-y+4z+10=0$.

5) Точка пересечения прямой и плоскости:

- уравнение прямой представляем в параметрическом виде;
- подставляем в уравнение плоскости;
- находим значение параметра t_0, соответствующее точке пересечение прямой и плоскости;
- подставляем значение t_0 в параметрическое уравнение прямой и находим $x_0, y_{k0,} z_0$ - координаты точки пересечения.

Пример 9. Найти точку пересечения прямой L и плоскости p.

L : $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+1}{3}$; p: 3x-y+z=0

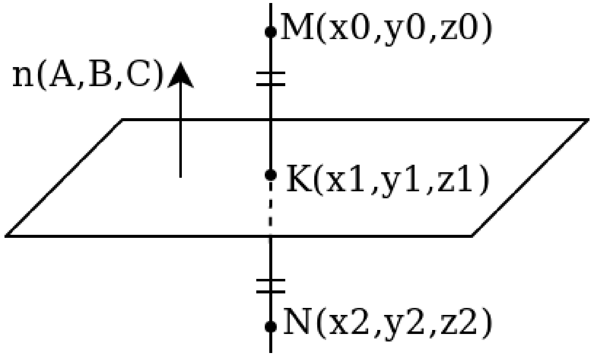
Решение: Запишем прямую в параметрическом виде: $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -2 - 2t, \\ z = -1 + 3t. \end{cases}$

И подставим в уравнение плоскости : $3(1+t)-(-2-2t)+(-1+3t)=0$;

Найдем $t= -0.5$ и подставим его в параметрическое уравнение прямой.

Получим координаты точки пересечения: *x=0.5; y= -1; z = -2.5.*
Ответ: М(0.5; -1; -2.5)

Пример 10. Дана плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ и вне её точка $M(x_0, y_0, z_0)$. Найти проекцию точки M на плоскость и точку, симметричную M относительно плоскости.



Решение:

1) Проведем через точку M прямую $\perp$ плоскости: $\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C}$;

2) Найдём точку K – точку пересечения плоскости и построенной прямой – проекцию точки M на плоскость $K(x_1, y_1, z_1)$;

3) Найдём координаты точки N – точки, симметричной M относительно плоскости. Точка K является серединой отрезка MN. Воспользуемся формулами

$x_1 = \frac{x_0+x_2}{2}$; $y_1 = \frac{y_0+y_2}{2}$; $z_1 = \frac{z_0+z_2}{2}$; выразим координаты точки N: $x_2 = 2x_1 - x_0$; $y_2 = 2y_1 - y_0$; $z_2 = 2z_1 - z_0 \Rightarrow N(x_2, y_2, z_2)$.

Например, плоскость $x + y - 2z - 6 = 0$ и вне ее точка М(1;1;1). Найти проекцию точки на плоскость и точку, симметричную M относительно плоскости.

Решение: 1) Проведем через точку M прямую $\perp$ плоскости: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$;

В параметрическом виде: $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 - 2t. \end{cases}$

2) Подставим уравнения прямой в уравнение плоскости и найдем точку пересечения прямой и плоскости:

(1+t)+(1+t)-2(1-2t)-6=0 => t=1=>

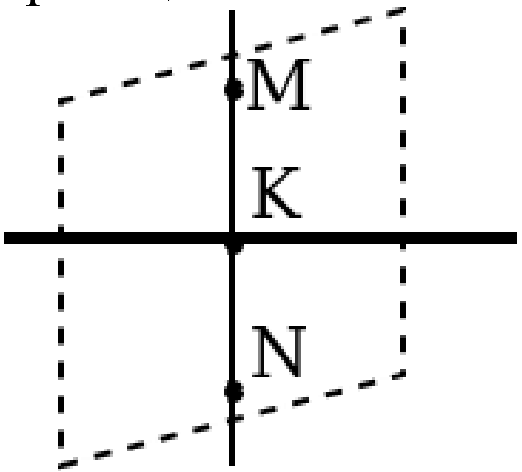
K(2;2;-1)- проекция М на плоскость;

3) Точка К-середина отрезка MN, где N*(x;y;z)* – точка, симметричная M относительно плоскости.

$\frac{1+x}{2}$=2=> x=3; $\frac{1+y}{2}$ =2 => y=3; $\frac{1+z}{2}$ = -1=> z= -3

Следовательно, **N(3;3;-3) точка, симметричная *M* относительно плоскости.**

Пример 11. Дана прямая $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ и вне её точка $M(x_0,y_0,z_0)$. Найти проекцию точки M на прямую и точку, симметричную M относительно прямой.



Решение: 1) Построим плоскость, проходящую через точку M, ⊥ данной прямой

$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0;$$

2) Найдём проекцию точки M на прямую – точку K, как точку пересечения данной прямой и построенной плоскости;

3) Найдём координаты точки N, симметричной точке M относительно прямой, используя формулы для координат середины отрезка (аналогично п. 3 предыдущей задачи).

Например, дана прямая: прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ вне её точка $M(1;1;1)$. Найти проекцию точки M на прямую и точку, симметричную M относительно прямой

Решение: 1) Построим плоскость, проходящую через точку M, $\perp$ данной прямой

$$2(x-1)+3(y-1)-(z-1)=0;\ 2x+3y-z-4=0;$$

2) Найдём проекцию точки M на прямую – точку K, как точку пересечения данной прямой и построенной плоскости. Для этого представим прямую в параметрическом виде и подставим в уравнение плоскости: $\begin{cases} x = 1+2t, \\ y = 3t, \\ z = -1-t. \end{cases}$

2(1+t)+9t+1+t-4=0; =>t=1/14; x=8/7; y=3/14; z= -15/14

K(8/7; 3/14; -15/14)-проекция точки M на прямую.

3) Найдём координаты точки $N(x;y;z)$, симметричной точке M относительно прямой, используя формулы для координат середины отрезка:

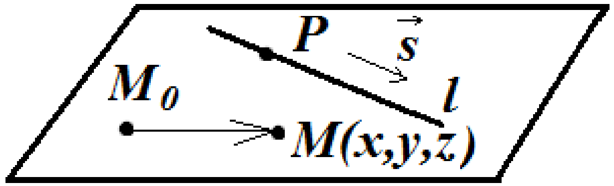
$\frac{1+x}{2}$ = *8/7; x=9/7*

$\frac{1+y}{2}$ = *3/14; y= -4/7*

$\frac{1+z}{2}$ = *-15/14; z= -22/7*

N(9/7; -4/7; -22/7)- точка, симметричная М относительно прямой.

Пример 12. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{-2}$ и точку $M_0(2;-2;0)$.



Решение. Прямая $\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{-2}$ проходит через точку $P(1;-3;-1)$ и имеет направляющий вектор $\vec{s}=(1;2;-2)$.

Проверим, что точка $M_0(2;-2;0)$ не лежит на прямой:

$$\frac{2-1}{1}\neq\frac{-2+3}{2}\neq\frac{0+1}{-2}$$

В этом случае, действительно, существует единственная плоскость, проходящая через заданные прямую и точку.

Пусть $M(x,y,z)$ – произвольная точка искомой плоскости, тогда векторы

$\overrightarrow{M_0\,M} = (x-2; y+2; z)$, $\overrightarrow{M_0\,P} = (1-2;\ -3+2; -1-0) = (-1; -1; -1)$ и $\vec{s} = (1; 2; -2)$ компланарны. Следовательно:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2+2) - (y+2)(2+1) + z(-2+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow$$

$4x - 3y - z - 14 = 0.$

Ответ: $4x - 3\,y - z - 14 = 0.$

Пример 13. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямые:

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t - 4 \\ z = t + 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-1}{-4}$$

Решение. Первая прямая задана параметрическими уравнениями, что позволяет указать точку $(3; -4; 1)$, лежащую на этой прямой, и направляющий вектор $\vec{s}_1 = \{2; 1; 1\}$.

Вторая прямая задана каноническими уравнениями, что позволяет также указать точку $(3; -4; 1)$, лежащую на второй прямой и её направляющий вектор $\vec{s}_2 = \{1; 3; -4\}$.

Данные прямые имеют общую точку $M_0(3; -4; 1)$. При этом, вектора $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ не коллинеарны, поскольку их соответствующие координаты не пропорциональны между собой.

Следовательно, заданные прямые не параллельны и пересекаются ровно в одной точке. В этом случае, действительно, существует единственная плоскость, проходящая через эти прямые.

Известна точка $M_0(3;-4;1)$, принадлежащая искомой плоскости, найдем вектор нормали $\vec{n}$ этой плоскости:

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 9\vec{j} + 5\vec{k} \Rightarrow \vec{n} = \{-7; 9;\; 5\}$$

Составим уравнение искомой плоскости:

$$-7(x-3) + 9(y+4) + 5(z-1) = 0 \Rightarrow$$

$7x - 9y - 5z - 52 = 0$ - уравнение плоскости, проходящей через заданные прямые.

Ответ: $7x - 9y - 5z - 52 = 0$

Пример 14. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямые:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+5}{-1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=2t+3 \\ y=t+2 \\ z=-t+4 \end{cases}$$

Решение. Первая прямая задана каноническими уравнениями, из которых видно, что прямая проходит через точку $M_1(1;4;-5)$ и имеет направляющий вектор $\vec{s}_1=\{2;1;-1\}$.

Вторая прямая задана параметрическими уравнениями, из которых видно, что эта прямая проходит через точку $M_2(3;2;4)$ и имеет направляющий вектор $\vec{s}_2=\{2;1;-1\}$.

Векторы $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ совпадают, следовательно, прямые параллельны и не совпадают, так как, например, точка M_2 не удовлетворяет уравнению первой прямой.

В этом случае существует единственная проходящая через эти прямые плоскость. Вектор нормали $\vec{n}$ перпендикулярен векторам $\vec{s}_1$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$(2;-2;9) лежащим в плоскости.

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 9 \end{vmatrix} = (9-2)\vec{i} - (18+2)\vec{j} + (-4-2)\vec{k} = 7\vec{i} - 20\vec{j} - 6\vec{k} \Rightarrow \ \vec{n} = \{7; -20; -6\}$$

Для составления уравнения плоскости: $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$ возьмём в качестве точки любую из точек M_1 или M_2. Пусть, например, $M_0 = M_1(1; 4; -5)$.

Запишем уравнение плоскости:

$$7(x-1) - 20(y-4) - 6(z+5) = 0 \ \Rightarrow$$

$7x - 20y - 6z + 43 = 0$ - уравнение плоскости, проходящей через заданные прямые.

Ответ: $7x - 20y - 6z + 43 = 0$.

Пример 15. Найти уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1; -1; -3)$, перпендикулярно прямым $\frac{x-2}{5} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+4}{-3}$ и $\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = -t - 7 \\ z = t + 2 \end{cases}$.

Решение. В данном случае, направляющий вектор искомой прямой ортогонален направляющим векторам заданных прямых.

Из канонических и параметрических уравнений прямых найдем их направляющие векторы: $\vec{s}_1 = \{5; 2; -3\}$ и $\vec{s}_2 = \{2; -1; 1\}$.

Направляющим вектором искомой прямой является вектор $\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 \Rightarrow$

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 11\vec{j} - 9\vec{k} \Rightarrow \vec{s} = \{-1; -11; -9\}$$

Так как искомая прямая проходит через точку $M_0(1; -1; -3)$, то можно записать ее параметрические, а затем и канонические уравнения:

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -11t - 1 \\ z = -9t - 3 \end{cases}$$ - параметрические уравнения искомой прямой

$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{-11} = \frac{z+3}{-9}$ – канонические уравнения

9.Пучок плоскостей.

Определение. Совокупность всех плоскостей, проходящих через данную прямую L, называется ***пучком плоскостей,*** а прямая L – ***осью пучка***.

Пусть ось пучка задана общим уравнением прямой:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую, имеет вид:

$$\boldsymbol{A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0}, \qquad (10)$$

где параметр λ принимает любые действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Уравнение пучка плоскостей используют при решении задач, в которых требуется найти плоскость, проходящую через заданную прямую, причем значение множителя λ обычно находят из какого-либо дополнительного условия, которое определяет положение искомой плоскости.

Пример 16. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 2x+3y-5z+1=0, \\ 3x-y+z+28=0. \end{cases}$$ и точку $M_1(1;-2;3)$.

Решение. Запишем уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую: $2x+3y-5z+1+\lambda(3x-y+z+28)=0.$

Подставим в уравнение пучка координаты точки M_1:

$$2\cdot1+3\cdot(-2)-5\cdot3+1)+\lambda(3\cdot1-(-2)+3+28)=0.$$

Следовательно, $\lambda=\frac{1}{2}$. Подставляя найденное значение λ в уравнение

пучка, найдем уравнение искомой плоскости:

$$2x+3y-5z+1+\frac{1}{2}\cdot(3x-y+z+28)=0,$$

или $7x + 5y - 9z + 30 = 0$.

Ответ: $7x + 5y - 9z + 30 = 0$