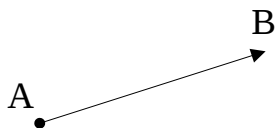


ЛЕКЦИЯ 6

Элементы векторной алгебры

§1 Основные понятия. Операции над векторами.

Определение. *Вектором* называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек).



К векторам относится также и **нулевой** вектор, начало и конец которого совпадают.

Определение. *Длиной (модулем)* вектора называется *расстояние* между началом и концом вектора.

$$|\vec{AB}| = |\vec{a}|$$

Определение. Векторы называются *коллинеарными*, если они расположены на одной или параллельных прямых. *Нулевой* вектор коллинеарен любому вектору.

Определение. Векторы называются *компланарными*, если существует плоскость, которой они параллельны.

Коллинеарные векторы всегда компланарны, но не все компланарные векторы коллинеарны.

Определение. Векторы называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые модули.

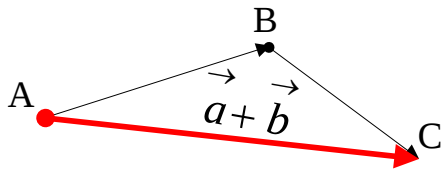
Всякие векторы можно привести к общему началу, т.е. построить векторы, соответственно равные данным и имеющие общее начало. Из определения равенства векторов следует, что любой вектор имеет бесконечно много векторов, равных ему.

Линейные операции над векторами:

- 1) сложение векторов;
- 2) умножение вектора на число

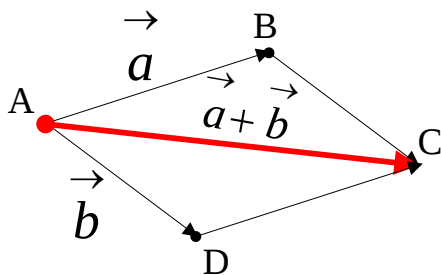
- 1) Сложение векторов.

Правило треугольника: суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$, если вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$.



Эти правило распространяется на любое количество векторов (правило ломаной).

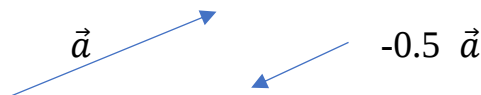
Правило параллелограмма: векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сносятся в общую точку, достраиваем до параллелограмма и суммой векторов является диагональ параллелограмма, выходящая из общего начала этих векторов.



2) Умножение вектора на число (на скаляр)

Вектор $\lambda\vec{a}$, где $\lambda \in R$ таков, что: 1) коллинеарен вектору $\vec{a}$, 2) длина вектора $\lambda\vec{a}$ $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$

3) при $\lambda > 0$ вектор $\lambda\vec{a}$ сонаправлен вектору $\vec{a}$, при $\lambda < 0$ вектор противоположно направлен вектору $\vec{a}$.



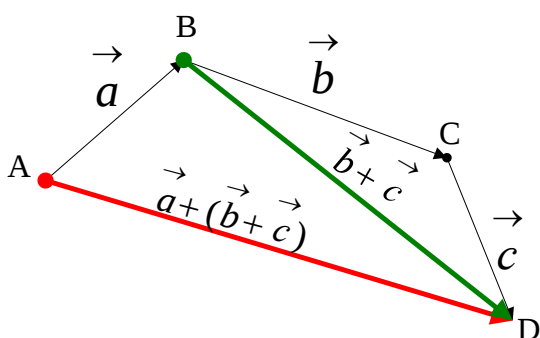
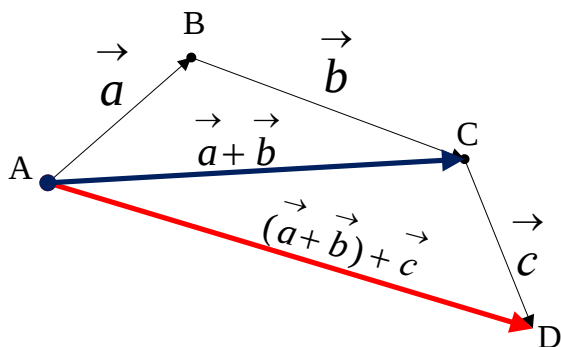
Свойства линейных операций

$\lambda, \mu \in R$

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (свойство коммутативности)
- 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (свойство ассоциативности)
- 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (существование нулевого элемента)
- 4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ (существование противоположного элемента)
- 5) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
- 6) $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
- 7) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$ ассоциативность умножения на число
- 8) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ умножение вектора на число дистрибутивно относительно сложения чисел

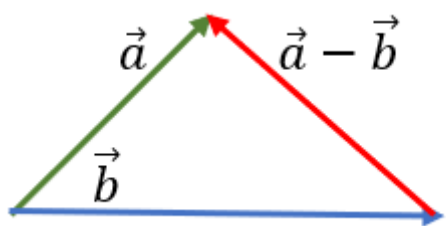
9) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$, (дистрибутивность умножения на число относительно сложения векторов)

Докажем свойство 4.



Определение. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\vec{a} - \vec{b}$) называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Геометрически разность двух векторов $\vec{a} - \vec{b}$, совмещённых в общее начало, есть вектор, направленный из конца вычитаемого вектора $\vec{b}$ в конец уменьшаемого вектора $\vec{a}$.



§2 Базис

Определение.

1) **Базисом в пространстве** называются любые 3 некопланарных вектора, взятые в определенном порядке.

2) **Базисом на плоскости** называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

3) **Базисом на прямой** называется любой ненулевой вектор.

Определение. *Линейной комбинацией векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ называется выражение вида $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$.*

В связи с этим можно записать следующие **свойства**:

Теорема 1. Каждый вектор, параллельный какой-либо прямой может быть разложен по базису на этой прямой.

Каждый вектор, параллельный какой-либо плоскости может быть разложен по базису на этой плоскости

Каждый вектор может быть разложен по базису в пространстве.

Координаты вектора в этом случае определяются однозначно.

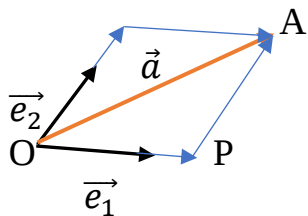
Доказательство:

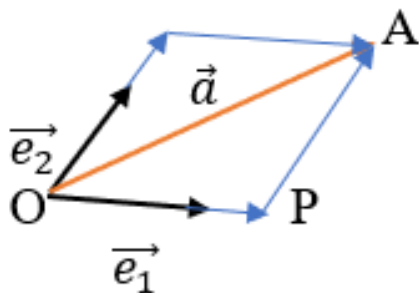
Первое утверждение означает, что для каждого вектора $\vec{a}$, коллинеарного ненулевому базисному вектору $\vec{e}$ (базис на прямой) существует число α такое, что $\vec{a} = \alpha \vec{e}$. Таким числом является либо $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{e}|}$, либо $-\frac{|\vec{a}|}{|\vec{e}|}$, смотря по тому, направлены ли $\vec{a}$ и $\vec{e}$ одинаково или противоположно.



Второе утверждение означает, что для каждого вектора $\vec{a}$, компланарного с двумя неколлинеарными векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ (базис на плоскости), найдутся числа α_1, α_2 , такие, что $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$.

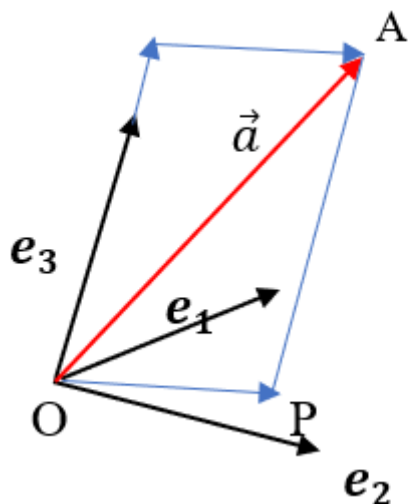
Поместим начала всех трех векторов в одну точку O , обозначим конец вектора $\vec{a}$ точкой A и проведем через точку A прямую AP , параллельную вектору $\vec{e}_2$. Тогда $\vec{a} = \vec{OP} + \vec{PA}$, причем $\vec{OP}$ коллинеарен $\vec{e}_1$, а $\vec{PA}$ коллинеарен $\vec{e}_2$, а в силу первого утверждения теоремы, $\vec{OP} = \alpha_1 \vec{e}_1$, а $\vec{PA} = \alpha_2 \vec{e}_2$, следовательно $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$.





Третье утверждение означает, что для каждого вектора $\vec{a}$ трёх некопланарных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ такие, что $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$. Для доказательства третьего утверждения поместим начала всех четырех векторов в одну точку O и проведем через конец вектора $\vec{a}$, точку A, прямую AP до параллельную $\vec{e}_3$. Тогда $\vec{a} = \vec{OP} + \vec{PA}$, причем $\vec{PA}$ коллинеарен $\vec{e}_3$, а $\vec{OP}$ компланарен $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, тогда, в силу уже доказанных выше утверждений, $\vec{PA} = \alpha_3 \vec{e}_3$, а $\vec{OP} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2$. Отсюда прямо и вытекает третье утверждение:

$$\vec{a} = \vec{OP} + \vec{PA} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3.$$



Докажем

четвертое

утверждение.

Докажем, что разложение по базису в пространстве единственное. Представим себе, что некоторый вектор $\vec{a}$ разложен по базису в пространстве двумя способами $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$ и $\vec{a} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3$.

Вычитая из первого выражения второе, мы получим

$(\alpha_1 - \beta_1) \vec{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \vec{e}_2 + (\alpha_3 - \beta_3) \vec{e}_3 = \vec{0}$. Если хотя бы одна из разностей в скобках не равна нулю, мы можем разложить один из векторов базиса по остальным. Например, если $(\alpha_1 - \beta_1) \neq 0$, то

$$\vec{e}_1 = \frac{(\alpha_2 - \beta_2)}{(\alpha_1 - \beta_1)} \vec{e}_2 + \frac{(\alpha_3 - \beta_3)}{(\alpha_1 - \beta_1)} \vec{e}_3, \quad \text{что} \quad \text{противоречит} \quad \text{условию}$$

некомпланарности базисных векторов. Следовательно, разложение вектора по базису в пространстве единственно. Аналогично доказывается для прямой и плоскости.

Теорема доказана.

Определение.

Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - базис в пространстве и вектор $\vec{a}$ представлен в виде линейной комбинации базисных векторов: $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$, то числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ называются **компонентами** или **координатами** вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

Аналогично даются определения координат вектора на прямой и плоскости.

Свойства координат векторов.

1) Равные векторы имеют одинаковые координаты, (только что доказали)

2) При умножении вектора на число его координаты тоже умножаются на это число.

Действительно, если $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$, то $\lambda \vec{a} = \lambda(\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3) = \lambda \alpha_1 \vec{e}_1 + \lambda \alpha_2 \vec{e}_2 + \lambda \alpha_3 \vec{e}_3$.

3) при сложении векторов складываются их соответствующие координаты.

$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$ и $\vec{b} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3$, то

$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1) \vec{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \vec{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3) \vec{e}_3$. Таким образом,

Все действия над векторами в координатном виде выполняются покомпонентно.

Следствие из свойства 2. Два вектора $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и

$\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2};$$

§ 3 Линейная зависимость векторов.

Определение. Линейная комбинация векторов $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3$ называется **тривиальной**, если все коэффициенты равны нулю;

нетривиальной - если хотя бы один из коэффициентов не равен нулю.

Определение. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называются **линейно зависимыми**, если можно подобрать такие $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, не равные нулю одновременно, что линейная комбинация этих векторов с этими коэффициентами равна нулевому вектору. Другими словами, существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому-вектору.:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

Определение. Если равенство выполняется только в том случае, когда все коэффициенты равны нулю, то векторы называются **линейно независимыми**. Иными словами, векторы называются линейно независимыми, если только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору.

Свойства линейно зависимых и линейно независимых векторов.

Свойство 1. Если среди векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ есть нулевой, то они линейно зависимы.

Доказательство: Действительно рассмотрим их линейную комбинацию, у которой при нулевом векторе коэффициент равен единице, а при остальных нули. Эта линейная комбинация нетривиальна и равна ноль-вектору.

Свойство 2. Если к системе линейно зависимых векторов добавить один или несколько векторов, то полученная система тоже будет линейно зависима.

Свойство 3. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда один из векторов раскладывается в линейную комбинацию остальных векторов.

Свойство 4. Любые два коллинеарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые два линейно зависимых вектора коллинеарны.

Действительно, пусть даны два коллинеарных вектора. Либо они оба нулевые, и тогда утверждение очевидно, либо один ненулевой и тогда второй по нему раскладывается. В обратную сторону, если линейно зависимы, то один раскладывается через другой в силу свойства 3, т.е. они коллинеарны.

Свойство 5. Любые три компланарных вектора линейно зависимы и, наоборот, любые 3 линейно зависимые вектора компланарны.

Доказательство: Пусть даны три компланарных вектора. Рассмотрим два из них. Если они коллинеарны, то линейно зависимы и сами по себе и с третьим вектором. Если же два неколлинеарны, то третий вектор по ним раскладывается и векторы линейно зависимы в силу свойства 3. Обратно, из трех линейно зависимых векторов один раскладывается через два других и следовательно, они компланарны.

Свойство 6. Каждые четыре вектора линейно зависимы.

Действительно, рассмотрим любые три из четырех векторов. Если они компланарны, то линейно зависимы и сами по себе и вместе с четвертым вектором. Если же они не компланарны, то четвертый вектор по ним раскладывается, откуда следует, что все они линейно зависимы.

§ 4. Система координат. Декартова система координат.

Зафиксируем в пространстве точку O и рассмотрим произвольную точку M .

Вектор $\overrightarrow{OM}$ назовем радиус-вектором точки М. Если в пространстве задать некоторый базис, то точке М можно сопоставить некоторую тройку чисел – компоненты (координаты) ее радиус-вектора:

$$\overrightarrow{OM} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \alpha_3 \vec{e}_3 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).$$

Определение. Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки и базиса. Точка называется **началом координат**. Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов называются осями координат.

1-я ось – ось **абсцисс** **OX**

2-я ось – ось **ординат** **OY**

3-я ось – ось **аппликата** **OZ**

Плоскости, проходящие через оси координат, называют координатными плоскостями.

*Компоненты (координаты) радиус вектора точки М называют **координатами** точки М в данной системе координат. 1-я - абсцисса, 2-я - ордината, 3-я - аппликата.*

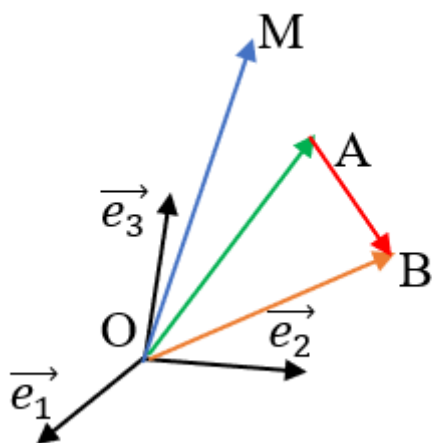
Если заданы точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Чтобы найти компоненты (координаты) вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.

На плоскости – две координанты, на прямой – одна.

В заданной системе координат координаты точки определены однозначно.



Пример.

Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис

в пространстве. Найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

$$\vec{a} = (1, 2, 1); \vec{b} = (0, -1, 1); \vec{c} = (2, 0, 1); \vec{d} = (5, 8, 2).$$

Решение: Любые три линейно независимых вектора в V_3 образуют базис.

Проверим на линейную независимость векторы $\vec{a}$; $\vec{b}$; $\vec{c}$. Составим определитель из координат векторов, записав их по столбцам.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 0 + 4 + 2 - 0 - 0 = 5 \neq 0 \Rightarrow \vec{a}; \vec{b}; \vec{c} \text{ - линейно независимые, } \Rightarrow \text{они}$$

образуют базис $\Rightarrow$ вектор $\vec{d}$ можно разложить по этому базису, т.е. существуют числа x, y, z , такие что:

$\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Запишем в координатах:

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ получаем систему: } \begin{cases} x + 2z = 5 \\ 2x - y = 8 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Данную систему можно решить любым способом. Решим ее по формулам Крамера. $\Delta = 5$; (уже найден);

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 0 + 16 + 4 - 0 - 0 = 15; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 8 - 16 - 10 - 0 = -10;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 10 + 5 - 0 - 8 = 5;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{15}{5} = 3; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-10}{5} = -2; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1; \text{ т.е.}$$

$$\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}.$$

$$\text{Проверка: } 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ верно!}$$

§ 5. Деление отрезка в данном отношении

Найдем координаты точки M на отрезке AB , которая делит этот отрезок в отношении λ , т.е. $\lambda = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$; или $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$ (*)

Если $\lambda > 0$, то точка M находится внутри отрезка AB , если $\lambda < 0$, то M находится на той же прямой, но вне отрезка AB .



Пусть координаты точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, координаты $M(x, y, z)$. Тогда перепишем (*) в координатной форме:

$$(x - x_1) = \lambda(x_2 - x), \quad (y - y_1) = \lambda(y_2 - y), \quad (z - z_1) = \lambda(z_2 - z)$$

Найдем координаты $M(x,y,z)$:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$

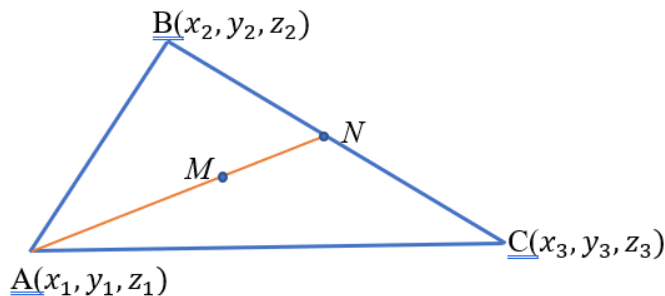
На плоскости задача решается так же, только базис состоит из двух векторов, поэтому остаются только первые две формулы.

Пример. Точки заданы своими координатами. $A(1,0,-2)$; $B(1,-4,2)$. Найдите координаты середины отрезка AB .

Решение: $\lambda = \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = 1$.

$M(\frac{1+1}{2}, \frac{0-4}{2}, \frac{-2+2}{2})$. Ответ: $M(1,-2,0)$.

Пример. Вершины треугольника заданы своими координатами. Найти координаты точки пересечения медиан.



$N(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2})$ - как координаты середины отрезка;

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MN}} = 2; M(\frac{x_1 + \frac{x_2+x_3}{2}}{2+1}, \frac{y_1 + \frac{y_2+y_3}{2}}{2+1}, \frac{z_1 + \frac{z_2+z_3}{2}}{2+1})$$

Таким образом координаты точки пересечения медиан можно вычислить по формуле: $M(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3})$.

§ 6. Проекция вектора на ось. Декартова прямоугольная система координат.

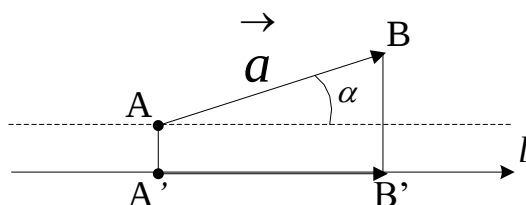
Пусть даны вектор $\overrightarrow{AB}$ и ось $\vec{l}$ (прямая с заданным на ней направлением).

Спроецируем начало и конец вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось $\vec{l}$: A_1B_1 .

Определение. Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось $\vec{l}$ называется число, обозначаемое $\text{pr}_{\vec{l}}\overrightarrow{AB}$, равное $\pm|A_1B_1|$. Знак проекции определяется так:

Если $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow \vec{l} \rightarrow \text{pr}_{\vec{l}}\overrightarrow{AB} = |A_1B_1| > 0$, а если

$\overrightarrow{A_1B_1} \updownarrow \vec{l} \rightarrow \text{pr}_{\vec{l}}\overrightarrow{AB} = -|A_1B_1| < 0$

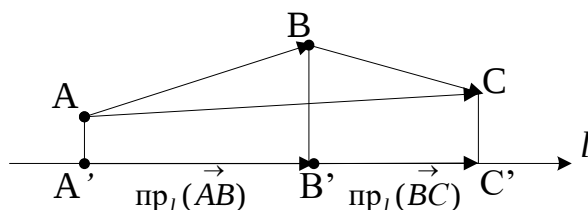


Свойства проекции

1) $\text{пр}_{\vec{l}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\widehat{(\vec{a}, \vec{l})})$,

таким образом, знак проекции зависит от величины угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{l}$: если угол острый $0 < \widehat{(\vec{a}, \vec{l})} < \frac{\pi}{2}$, то проекция положительна, если угол тупой $\frac{\pi}{2} < \widehat{(\vec{a}, \vec{l})} < \pi$, то проекция отрицательна.

3) $\text{пр}_{\vec{l}}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_{\vec{l}} \vec{a} + \text{пр}_{\vec{l}} \vec{b}$



3) $\text{пр}_{\vec{l}} \lambda \vec{a} = \lambda \text{пр}_{\vec{l}} \vec{a}$

Определение. *Ортом вектора $\vec{a}$ называется вектор $\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, таким*

образом орт вектора сонаправлен самому вектору и имеет единичную длину (модуль). Иными словами, орт вектора – это чистое направление.

Определение. Базис называется **ортонормированным**, если его векторы попарно перпендикулярны (ортогональны), а их длины (модули) равны единице.

Значит, направляющие векторы ортонормированного базиса являются ортами.

Определение. Декартова система координат, базис которой ортонормирован называется **декартовой прямоугольной системой координат** (ПДСК).

Ориентация тройки векторов в пространстве

Ориентация векторов в пространстве вводится для некомпланарной упорядоченной (пронумерованной) тройки векторов.

Определение. Три вектора называются **правой тройкой**, если при наблюдении из конца третьего вектора поворот от первого ко второму мы видим совершающимся против часовой стрелки

Определение. Три вектора называются **левой тройкой**, если при наблюдении из конца третьего вектора поворот от первого ко второму мы видим совершающимся по часовой стрелки

Традиционная прямоугольная декартова система координат: три взаимно перпендикулярные оси, начало координат точка О, направление на осях задано с помощью правой тройки ортогональных ортов $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

Координаты произвольного вектора – его проекции на координатные оси.

Действительно,

$$\text{вектор } \vec{a} = \vec{OA} = \vec{OD} + \vec{OF} = \vec{OD} + (\vec{OB} + \vec{OC});$$

$$\vec{OB} \parallel \vec{i}, \quad \vec{OC} \parallel \vec{j}, \quad \vec{OD} \parallel \vec{k} \quad \text{значит,}$$

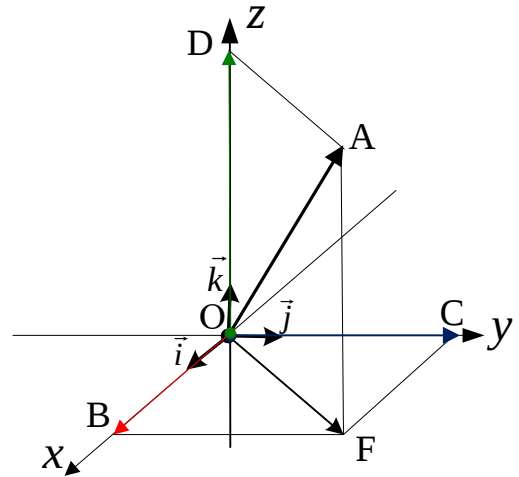
$$\text{согласно } \vec{OB} = x \cdot \vec{i}, \quad \vec{OC} = y \cdot \vec{j},$$

$$\vec{OD} = z \cdot \vec{k}, \text{ где } x; y; z - \text{ проекции } \vec{a}$$

на соответствующие оси. Тогда $\vec{a} =$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} - \text{разложение}$$

вектора $\vec{a}$ по векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$



Коэффициенты x, y, z в разложении вектора по базисным векторам определены однозначно.

Напомним, что в заданной системе координат все действия над векторами совершаются покомпонентно.

Формула длины (модуля) вектора в прямоугольной декартовой системе координат: если $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z) \rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Эту формулу легко доказать по теореме Пифагора.

Соответственно, расстояние между двумя точками по формуле:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Направляющие косинусы

Если вектор $\vec{e}$ имеет единичную длину, то есть является ортом, то его координатами являются косинусы углов, который этот вектор образует с координатными осями. Действительно, пусть $(\vec{e}, \vec{i}) = \alpha, (\vec{e}, \vec{j}) = \beta, (\vec{e}, \vec{k}) = \gamma$, тогда $x = |\vec{e}| \cos \alpha = \cos \alpha; y = |\vec{e}| \cos \beta = \cos \beta; z = |\vec{e}| \cos \gamma = \cos \gamma; \Rightarrow$

$$\vec{e} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

Координаты единичного вектора называются направляющими косинусами.

Направляющие косинусы связаны соотношением:

$$(\cos \alpha)^2 + (\cos \beta)^2 + (\cos \gamma)^2 = 1$$