

ЛЕКЦИЯ 3 Обратная матрица.

§ 1 Определитель произведения квадратных матриц.

Теорема. Пусть A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка. Тогда $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Докажем эту теорему для матриц второго порядка.

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax & ay \\ cx + dz & cy + dt \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bz & bt \\ cx + dz & cy + dt \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} ax & ay \\ cx & cy \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ax & ay \\ dz & dt \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bz & bt \\ cx & cy \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bz & bt \\ dz & dt \end{vmatrix} = \\ &= 0 + ad(xt - yz) + bc(zx - ty) + 0 = \Delta \end{aligned}$$

$$\det A \det B = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} = (ad - bc)(xt - yz) = \Delta$$

Данная теорема справедлива для матриц любого порядка.

Пример. Найти определитель произведения матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

Находим определители данных матриц второго порядка

$$\det A = -2; \det B = 7$$

По теореме об определителе произведения матриц получаем:

$$\det(AB) = \det A \det B = (-2)(7) = -14.$$

Вычислим этот же определитель, находя произведение матриц:

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} 9 & -13 \\ 19 & -29 \end{vmatrix} = -9 \cdot 29 + 19 \cdot 13 = -14$$

Результат совпадает с полученным ранее.

§ 2 Невырожденная матрица.

Определение. Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$. В противном случае, если $\det A = 0$, она называется *вырожденной*.

Утверждение 1 Произведение квадратных матриц, хотя бы одна из которых вырожденная, будет вырожденной.

Доказательство: $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 0$

Утверждение 2 Произведение двух невырожденных матриц будет невырожденной матрицей. $\det AB = \det A \det B \neq 0$

§ 3 Обратная матрица.

1. Определение. Матрица $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & \cdot & \cdot & A_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & \cdot & \cdot & A_{nn} \end{pmatrix}$, где A_{ij} - алгебраические дополнения к a_{ij} - элементам матрицы A , называется **присоединенной** к матрице A (союзной).

Определение. Матрица A^{-1} называется **обратной** к матрице A , если выполняется условие $AA^{-1} = A^{-1}A = E$,

где E -единичная матрица такого же порядка, что и A .

Матрица A^{-1} имеет такой же порядок что и A .

Теорема. Невырожденная матрица имеет обратную.

Проведем доказательство для случая матрицы порядка 3.

Составим присоединенную матрицу и найдем произведение

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} & \dots & a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} & \dots & a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} \\ a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} & \dots & a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot E. \quad (\text{по свойствам определителей 10, 11})$$

Аналогично доказывается, что $A^*A = \det A \cdot E$.

Или $A \frac{A^*}{\det A} = \frac{A^*}{\det A} A = E$, т.е существует обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом проводятся доказательства для матрицы порядка n .

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{11} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

Утверждение 3. Найденная матрица A^{-1} является единственной, удовлетворяющей условию $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, для данной невырожденной матрицы A .

Доказательство. Действительно, если есть C , такая, что $AC=CA=E$, то

$$CAA^{-1} = C(AA^{-1}) = CE = C$$

$$CAA^{-1} = (CA)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1}, \text{ следовательно } C=A^{-1}$$

Утверждение 4. Для вырожденной матрицы обратная не существует.

Данное утверждение следует из утверждения 1. Действительно,

$$\det AA^{-1} = \det A^{-1} \det A = 0, \text{ с другой стороны } \det E = 1, \text{ противоречие.}$$

Очевидно, что матрица A^{-1} имеет такой же порядок что и A .

Критерий существования обратной матрицы. Для квадратной матрицы A существует обратная A^{-1} тогда и только тогда, когда A невырожденная.

2. Свойства обратной матрицы:

$$1) \det(A^{-1}) = 1/\det A.$$

Вытекает из теоремы об определителе квадратных матриц.

$$\det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1} = \det E = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = 1/\det A$$

Отсюда следует, что A^{-1} также невырожденная. Обратной для нее является матрица A .

$$2) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$3) (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$4) (A^{-1})^{-1} = A$$

Пример. Найти обратную матрицу.

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(Для матрицы второго порядка существует простое правило: элементы, стоящие на главной диагонали меняются местами, а стоящие на побочной диагонали меняют знак)

Проверка: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = E; \text{Верно.}$$

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 2(-7 - 2) = -18 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{18} \begin{pmatrix} 6 & -6 & 3 \\ -14 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -7 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 6 & -14 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} A = -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 6 & -14 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E;$$

Проверка обязательна!

§ 4 Решение матричных уравнений с помощью обратной матрицы.

Пусть A - квадратная матрица

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$XA=B \Rightarrow (XA)A^{-1} = BA^{-1} \Rightarrow X = BA^{-1}$$

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Решить матричные уравнения: $AX=B$; $XA=B$

$$\det A=1; A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix};$$

Решим уравнение $AX=B$; $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix}$;

Проверка: $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Решим уравнение $XA=B$

$$X=BA^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 7 \\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -2 \\ -4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-31 & 23 \\ -11 & 9\end{pmatrix}$$

Проверка: $\begin{pmatrix} -31 & 23 \\ -11 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

§ 5 Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы.

Рассмотрим систему n уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Ее можно записать в матричном виде: $AX=B$,

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Если $\det A \neq 0$, то A^{-1} существует и $X = A^{-1}B$.

Следствие: формулы Крамера.

Пример. Решить матричным методом систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1(12-6) - 5(8-2) + 2(6-3) = -18$$

$$A^{-1} = -1/18 \begin{pmatrix} 6 & -6 & 3 \\ -14 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -7 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 6 & -14 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \text{ Уже искали!}$$

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 6 & -14 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -18 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } x = -2, y = 1, z = -1.$$