



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1 СЕМЕСТР

Практическое занятие

Правило Лопиталя и формула Тейлора.



Теорема (правило) Лопиталья (Лопиталь (1661-1704) – французский математик).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$:

- дифференцируемые в некоторой окрестности точки x_0 , за исключением быть может, самой этой точки;
- при $x \rightarrow x_0$ обе функции одновременно стремятся к нулю или к бесконечности.

Тогда предел их отношения при $x \rightarrow x_0$ равен пределу отношения их производных, если последний существует:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Из теоремы следует, что правило Лопиталья позволяет раскрывать неопределенности вида $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$.



Пример 1. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

Решение. Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1 + \ln x)'}{(e^x - e)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2 + 1}{e} = \frac{3}{e}.$$

Пример 2. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^{\frac{3}{x}} - 1}$.

Решение.

В этом примере неопределенность $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя.



$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}; \quad g'(x) = e^{\frac{3}{x}} \cdot \left(\frac{-3}{x^2}\right).$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^{\frac{3}{x}} - 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\frac{2x^2}{(1+x^2) \cdot e^{\frac{3}{x}} \cdot (-3)} \right] = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(1+x^2) \cdot 1} = \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Замечание. Если при решении примера после применения правила Лопиталя попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталя может быть применено второй раз, третий и т.д. пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталя.

В примере 2 можно было второй раз применить правило Лопиталя:



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^{\frac{3}{x}} - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\frac{2x^2}{(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)} \right] = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2)'}{(1+x^2)'} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x} = \frac{2}{3}.$$

Пример 3. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin^2 x)'}{x'} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{1} = -2 \cdot 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

В следующем примере правило Лопиталя применяется трижды.



Пример 4. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{e^x}$.

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{e^x} = 0.$$

Следствие. Многочлен любой степени при $x \rightarrow \infty$ растет медленнее показательной функции.

Пример 5. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x e^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$.

Решение. Неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, $f'(x) = e^{\frac{x}{2}}(1 + \frac{1}{2}x)$, $g'(x) = 1 + e^x \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x e^{\frac{x}{2}}}{x + e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}(1 + \frac{1}{2}x)}{1 + e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$



Применим еще раз правило Лопиталя:

$$f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4 + x), \quad g''(x) = e^x \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}x\right)}{1 + e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4 + x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}(4 + x)}{e^{\frac{x}{2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{4}(4 + x)\right)'}{\left(e^{\frac{x}{2}}\right)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}} = 0.$$

Пример 6. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.



Решение: Неопределенность $\frac{0}{0}$, $f'(x) = e^x + e^{-x} - 2$, $g'(x) = 1 - \cos x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right].$$

Продолжаем применять правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Пример 7. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \pi/2 - 0} \left(\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x \right)$.

Решение. Так как оба слагаемые при $x \rightarrow \pi/2 - 0$ неограниченно возрастают, то этот предел есть неопределенность вида $\infty - \infty$. Выполним следующие тождественные преобразования:

$$\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}.$$



При $x \rightarrow \pi/2$ числитель и знаменатель последней дроби стремятся к нулю. Следовательно, от неопределенности вида $\infty - \infty$ мы пришли к неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(1 - \sin x)'}{(\cos x)'} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0$$

Пример 8. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \sin(x - 1) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sin(x - 1) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x - 1)}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}} =$$



$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sin(x-1))'}{(ctg \frac{\pi x}{2})'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x-1)}{\left(-\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi x}{2}}\right) \cdot \frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \cos(x-1) \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{2} = -\frac{2}{\pi}.$$

Пример 9. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln^3 x)$.

Решение: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln^3 x) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(1 - \frac{\ln^3 x}{x}\right).$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^3 x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln^3 x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \ln^2 x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3 \ln^2 x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 \ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(6 \ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 \cdot \frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln^3 x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(1 - \frac{\ln^3 x}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$



Пример 10. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x$.

Решение: $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow +0} x = 0$.

Неопределенности вида 0^0 ; 1^∞ ; ∞^0 можно раскрыть с помощью логарифмирования.

Такие неопределенности встречаются при нахождении пределов функций вида $y = [f(x)]^{g(x)}$, $f(x) > 0$ вблизи точки a при $x \rightarrow a$.

Для нахождения предела такой функции достаточно найти предел функции:

$$\ln y = g(x) \ln f(x).$$

Пример 11. Найти предел $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$.



Решение. Неопределенность 0^0 . Обозначим $y = x^x$. Логарифм этого выражения $\ln y = \ln x^x = x \ln x$.

Из примера, рассмотренного ранее, следует, что $\lim_{x \rightarrow +0} \ln y = \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = 0$,

следовательно, $\lim_{x \rightarrow +0} y = \lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1$.

Можно иначе оформить данный пример.

Любую функцию $f(x) > 0$ можно представить следующим образом:

$$f(x) = e^{\ln f(x)} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \ln(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} x \ln(x)} = e^0 = 1.$$

Пример 12. Найти предел $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$.

Решение. Неопределенность ∞^0 . Обозначим $y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$. Логарифмируем:



$$\ln y = \ln(tg x)^{\cos x} = \cos x \ln(tg x) = \frac{\ln(tg x)}{\frac{1}{\cos x}}.$$

И числитель знаменатель стремятся к бесконечности при $x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$.

Применяем правило Лопиталья:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{\ln(tg x)}{\frac{1}{\cos x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{(\ln(tg x))'}{\left(\frac{1}{\cos x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \left(\frac{1}{tg x \cos^2 x} \right) \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0. \end{aligned}$$

Так как $\ln y$ стремится к нулю, то $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} y = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} (tg x)^{\cos x} = 1$.

Пример 13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{2x}$



Решение: Неопределенность 1^∞ .

Пусть $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}$, тогда $\ln y = 2x \ln \left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \ln \frac{x+1}{x-1} &= [\infty \cdot 0] = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\ln \left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \left(\frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 4. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y = 4, \text{ следовательно, } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = e^4.$$



Формула Тейлора

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}$ и имеет всюду в этой окрестности производные $f^{(k)}(x)$ при $k = 1, 2, \dots, n$.

Многочленом Тейлора степени n в точке x_0 называется многочлен $P(x)$ такой что:

$$P(x_0) = f(x_0), P'(x_0) = f'(x_0), \dots, P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Многочлен Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0 имеет вид:

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Разность $R_n(x) = f(x) - P(x)$ называется n -ым остаточным членом.

Формула:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

называется формулой Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0 .



Остаточный член, представленный в виде:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \text{ где } \xi \in (x, x_0),$$

называется остаточным членом в форме Лагранжа.

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

Остаточный член имеет вид: $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$, где $o((x - x_0)^n)$ – функция, имеющая более высокий порядок малости чем $(x - x_0)^n$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} = 0.$$



Теорема. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 и ее некоторой окрестности непрерывные n производных, то она может быть представлена в виде формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа или при $x \rightarrow x_0$ с остаточным членом в форме Пеано.

Разложение основных функций по формуле Тейлора при $x_0 = 0$
(формулы Маклорена)

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$



$$4. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$5. (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$6. \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$7. \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$8. \operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$$

$$9. \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^6)$$

$$10. \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$$



Пример 14. Представить функцию $f(x) = \cos 3x$ по формуле Тейлора в окрестности $x_0 = 0$.

Решение.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \frac{(3x)^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^{2n} (3x)^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \\ &= 1 - \frac{3^2}{2!} x^2 + \frac{3^4}{4!} x^4 - \frac{3^6}{6!} x^6 + \dots + \frac{(-1)^{2n} \cdot 3^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n+1}). \end{aligned}$$

Пример 15. Представить функцию $f(x) = \frac{1}{2x-3}$ по формуле Тейлора в окрестности $x_0 = 2$

Решение.



$$f(x) = \frac{1}{2x-3} = \frac{1}{2(x-2)+1} = \frac{1}{1+2(x-2)}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+2(x-2)} &= 1 - 2(x-2) + (2(x-2))^2 + \dots + (-1)^n (2(x-2))^n + o((x-2)^n) = \\ &= 1 - 2(x-2) + 2^2(x-2)^2 + \dots + (-1)^n \cdot 2^n \cdot (x-2)^n + o((x-2)^n) \end{aligned}$$

Применение формулы Тейлора к вычислению пределов

Пример 16. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

Решение.



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{3!}}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6} + 0 = -\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Пример 17. Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - e^{-2x^2}}{x^4}$$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - e^{-2x^2}}{x^4} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$



$$\begin{aligned} &= \left[\begin{aligned} \cos 2x &= 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4) = 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} + o(x^4) \\ e^{-2x^2} &= 1 + (-2x^2) + \frac{(-2x^2)^2}{2!} + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \frac{4x^4}{2!} + o(x^4) \end{aligned} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - 1 + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 \left(-\frac{4}{3} + \frac{o(x^4)}{x^4} \right)}{x^4} = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Пример 18. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sqrt{1+2x} - e^{4x}}{\cos 3x - \sqrt{1+2x} + \ln(1+x)}.$

Решение.



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sqrt{1 + 2x} - e^{4x}}{\cos 3x - \sqrt{1 + 2x} + \ln(1 + x)} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sin 3x = 3x + o(x^2) \\ \sqrt{1 + 2x} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1)}{2!} (2x)^2 + o(x^2) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \cos 3x = 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + o(x^2) = 1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2) \\ e^{4x} = 1 + 4x + \frac{(4x)^2}{2!} + o(x^2) = 1 + 4x + 8x^2 + o(x^4) \\ \ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^4) \end{array} \right] =$$



$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - 1 - 4x - 8x^2 + o(x^2)}{1 - \frac{9}{2}x^2 - 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{17}{2}x^2 + o(x^2)}{-\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(-\frac{17}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \right)}{x^2 \left(-\frac{9}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \right)} = \frac{17}{9}. \end{aligned}$$

Пример 19.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) - 1 - x}{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3) \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(1 + \frac{o(x^2)}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{o(x^3)}{x^2} \right)} = 1$$



Пример 20.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Пример 21.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2) - x + 2}{4(x-2)^2 + 5(x-2)^3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) - \frac{(x-2)^3}{3!} + o((x-2)^4) - (x-2)}{4(x-2)^2 + 5(x-2)^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{(x-2)^3}{3!} + o((x-2)^4)}{(x-2)^2(4 + 5(x-2))} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{3! \cdot 4} = 0. \end{aligned}$$



Задачи для самостоятельного решения

1) Вычислить пределы, используя правило Лопиталя.

1	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$	2	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 3)}{x^4 + x^2 + 1}$
3	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)}$	4	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)}$
5	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$	6	$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\ln x}$
7	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{\ln\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)}$	8	$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \sin x}$



9	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi/x}{\operatorname{ctg}(\pi x/2)}$	10	$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{\sin^2 x}$
11	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{2 - x}$	12	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$
13	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{4^x - 4}$	14	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \sqrt{x})$
15	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$	16	$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\frac{\pi}{4} - x}$
17	$\lim_{x \rightarrow 1+0} \ln x \cdot \ln(x-1)$	18	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(\sqrt{1+4x} - 2)}{x-2}$



19	$\lim_{x \rightarrow 2-0} (2-x) \cdot \ln \ln(2-x)$	20	$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg} x}$
21	$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln^2 x$	22	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 e^{-x}$
23	$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$	24	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x 2^x}{3^x}$
25	$\lim_{x \rightarrow \pi-0} \cos \frac{x}{2} \cdot \ln(\pi-x)$	26	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$
27	$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$	28	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x} \right)$
29	$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right)$	30	$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x^2} e^{1/x}$



2) Вычислить предел, используя правило Лопиталя.

1	$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{\cos(\pi x/2)}$	2	$\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$
3	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{1/x}$	4	$\lim_{x \rightarrow 0+} x^{\sin x}$
5	$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$	6	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{1/\ln 2x}$

7	$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$	8	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2^x)^{1/x}$
9	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos 3x \right)^{1/x}$	10	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{1/x}$



11	$\lim_{x \rightarrow \pi-0} (\pi - x)^{\cos(x/2)}$	12	$\lim_{x \rightarrow 0+} (\operatorname{ctg} x)^{1/\ln x}$
13	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^x$	14	$\lim_{x \rightarrow 0+} (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$
15	$\lim_{x \rightarrow 0+} x^{1/\ln(e^x-1)}$	16	$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x\right)^{1/\arcsin x}$
17	$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\arcsin x}$	18	$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$
19	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x)^{1/x}$	20	$\lim_{x \rightarrow 3} \left(2 - \frac{x}{3}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/6)}$
21	$\lim_{x \rightarrow 0+} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$	22	$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^x$



3) Вычислить предел, используя формулу Тейлора

1a	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \operatorname{tg} 5x - \cos x}{\sqrt{1 - x^2} - \sqrt[5]{1 + x}}$
1б	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{x^2} - \sin x}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 + x^2} - \ln(2 + x) + \ln 2}$
2a	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2x) + \sin 3x}{2 - e^{4x} - \sqrt[3]{1 + x}}$
2б	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x + \sqrt{1 + 2x^2} - \sqrt{1 + 2x}}{\ln(2 + x) - \ln(2 + x^2) - \frac{1}{2} \sin x}$